

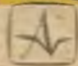
PETRICĂ ION • RUSU ION

Probleme de matematică

PENTRU TREAPTA I DE LICEU

COLECȚIA LYCEUM

EDITURA ALBATROS



PETRICĂ ION • RUSU ION

Probleme de matematică pentru treapta I de liceu

Cuvînt înainte
de Acad. GH. MIHOC

EDITURA ALBATROS
1976



CUPRINS

Un profesor conștiincios de matematică din școala medie, oricît ar fi de dotat, nu se poate dispensa de un manual și de o culegere de probleme. Acestea sînt instrumentele lui de lucru indispensabile. Același lucru îl putem spune și despre elevi. Oricît de bine ar explica profesorul, el nu poate dispensa elevul de a gîndi și de a-și pune întrebări. Și cel mai bine este ajutat elevul în această direcție, dacă are la îndemînă un manual bun și o culegere de probleme frumoase și interesante.

O experiență îndelungată arată că singura cale pentru ca un elev să progreseze în studiul matematicii este ca să rezolve probleme cît mai multe și cît mai variate. Culegerea de față poate servi în acest scop pentru toate categoriile de elevi.

Se găsesc în această carte probleme dificile, care se pretează la soluții ingenioase și a căror rezolvare le va da elevilor momente de mari satisfacții. Nu trebuie să uităm că matematica este o știință vie, caracterizată prin faptul că de la primii pași în domeniul ei începe cercetarea individuală. Aproape la nici o disciplină nu se poate vedea personalitatea elevului atît de bine ca la matematică. Aceeași problemă poate fi rezolvată în mai multe feluri. Fiecare problemă poate da loc la discuții, interpretări, generalizări. Pentru acest motiv, rezolvarea problemelor devine una din operațiile cele mai captivante pentru tinerii matematicieni, încrezători în puterea raționamentului lor.

Problemele din carte sînt gradate, pornindu-se de la exerciții simple, care nu prezintă nici o dificultate.

Se cere numai bunăvoință și tenacitate. La început, chiar problemele ușoare par grele. Ele trebuie însă să fie rezolvate cu răbdare. După ce elevul a luat enunțul din culegere, cartea trebuie s-o pună de o parte și numai după ce, în urma mai multor încercări, crede că a ajuns la soluția definitivă, să se uite la răspunsuri, pentru verificare. Procedînd astfel, timpul de rezolvare al problemelor devine din ce în ce mai scurt și problemele din ce în ce mai ușoare.

Un merit deosebit al cărții de față îl constituie exercițiile de învățămînt programat și testele de control, care reprezintă un instrument util pentru munca independentă a elevilor, cărora li se dă posibilitatea de a-și aprecia singuri rezultatele muncii lor.

Am constatat personal că unii tineri, care nu simțeau nici o atracție pentru studiul matematicii, după ce au rezolvat cîteva zeci de probleme, au început să capete încredere în ei și să gîndească corect, ca niște adevărați matematicieni.

Buna pregătire a tineretului la matematici reprezintă astăzi o operă de importanță națională. Nu există în prezent nici o ramură de activitate omenească în care să nu se facă apel la cunoștințe matematice. Mîine însă, după cum arată clar progresele informaticii, matematica va deveni știința de bază, indispensabilă, a omenirii, fără de care nici un progres nu va fi posibil. Va trebui deci, ca profesori de matematică, să dăm elevilor noștri o instruire cît mai temeinică. Nu trebuie însă să uităm că în cele cîteva decenii, în care ei vor aplica în viață învățăturile noastre, matematica, mergînd pe linia extrapolatoare, a celor petrecute în secolul nostru, va suferi mari transformări. Ne putem atunci întreba ce să-i învățăm pe elevii cu precădere din matematica timpului nostru. Cum nimeni nu poate răspunde cu precizie la această întrebare, cred că cel mai bun lucru pe care-l putem face în prezent este să-i ajutăm să capete un just raționament matematic, învățîndu-i să rezolve probleme interesante, grele și frumoase.

Acad. GH. MIHOC

DIN PARTEA AUTORILOR

Prezenta lucrare cuprinde probleme de algebră, trigonometrie și geometrie din programa în vigoare a treptei întîi de liceu, adresîndu-se în primul rînd elevilor din aceste clase.

Considerăm, de asemenea, că este utilă și candidaților la concursurile de admitere în învățămîntul superior.

Pentru fixarea noțiunilor teoretice, expuse în manualele școlare, față de alte culegeri de probleme de matematică destinate elevilor, am introdus și exerciții de învățămînt programat.

Nou în această lucrare este și capitolul intitulat „Teste de control", care a luat locul obișnuitului capitol de exerciții de sinteză.

Pe cît a fost posibil, am ordonat problemele în concordanță cu programa școlară, făcînd astfel utilă folosirea lucrării la clasă.

Problemele au soluții, indicații sau răspunsuri, iar la fiecare capitol sînt probleme amănunțit tratate, pentru a pune la îndemîna cititorului metode de rezolvare și scheme de raționamente.

Au fost folosite următoarele prescurtări:

A.S.E., București: Academia de studii economice București;

I.P.: Institutul Politehnic;

G.M.B: Gazeta matematică seria B.

Lucrările cu un grad mai mare de dificultate au fost notate cu asterisc.

I.1. MULȚIMI
OPERAȚII CU MULȚIMI. MULȚIMI DE NUMERE

Exerciții de învățămînt programat

Pentru fiecare din exercițiile de mai jos s-au indicat mai multe răspunsuri posibile, iar rezolvarea lor constă în indicarea răspunsului corect. Menționăm că este bine ca de fiecare dată să se argumenteze de ce o afirmație este sau nu corectă.

I.1.1. Fiind date două mulțimi oarecare A și B numim reuniunea lor și o notăm $A \cup B$, mulțimea ce conține acele elemente care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B și numai pe acelea. Simbolic se scrie: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$

Care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false? Apoi să se verifice proprietățile pe mulțimile $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

a) $A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B$

b) $A \cup B \subset A$ și $A \cup B \subset B$

c) Dacă $A \subset D$ și $B \subset D \Rightarrow A \cup B \subset D$

d) $(\forall) A, B \Rightarrow A \cup B = B \cup A$ (comutativitate)

e) $(\forall) A, B, C \Rightarrow (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitate)

f) Dacă $A \subset D \Rightarrow A \cup D = A$

g) Dacă $A \subset D \Rightarrow A \cup D = D$

I.1.2. Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea care conține toate elementele ce aparțin simultan lui A și B și o notăm prin $A \cap B$.

Simbolic se scrie: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$. Care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false? Apoi verificați proprietățile generale pe mulțimile de la I.1.1.

a) $A \subset A \cap B$ și $B \subset A \cap B$
b) $A \cap B \subset A$ și $A \cap B \subset B$
c) $A \subset D,\ B \subset D \Rightarrow D \subset A \cap B$
d) $A \subset D,\ B \subset D \Rightarrow A \cap B \subset D$
e) $A \cap B = B \cap A$ (comutativitate)
f) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitate)
g) $A \cup (A \cap B) = A$
h) $A \cap (A \cup B) = A$ } (proprietăți de absorbție)
i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (intersecția este distributivă față de reuniune)
j) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (reuniunea este distributivă față de intersecție)

I.1.3. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \{x \in N \mid x$ divizor al lui $10\}$, $C = \{x \in N \mid x$ divizor al lui $12\}$. Care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false? (Vezi notațiile de la I.1.9).

a) $A \subset B$
b) $B \subset A$
c) $A = B$
d) $A \subset C$
e) $C \subset A$
f) $A \cup B = A$
g) $A \cup B = B$
h) $A \cap B = A$
j) $A \cap B = B$

I.1.4. Să considerăm mulțimile: $A = \{x \in Z \mid x$ divizor al lui $6\}$; $B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 6 = 0\}$; $C = \{1, 6\}$; $D = \{x \in N \mid x$ divizor al lui $6\}$. Să se precizeze care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false?

a) $D \subset A$
b) $D \cap A = D$
c) $B = C$
d) $C \subset D$
e) $(C \cap D) \cap A = A$

I.1.5. Diferența a două mulțimi A și B se notează prin $A - B$ și este prin definiție mulțimea $A - B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$. Dacă $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e, f\}$ se cere să se

arate care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate și care sînt false?

a) $A - B = \{a, c\}$ c) $A - B \subset A$
b) $A - B = \{e, f\}$ d) $A - B \subset B$

I.1.6. Mulțimea care nu conține nici un element o vom nota prin φ și o vom numi mulțimea vidă. A fiind o mulțime oarecare, să se precizeze, care din relațiile de mai jos sînt adevărate și care sînt false?

a) $\varphi \subset A$ d) $A \cap \varphi = \varphi$
b) Dacă $A \subset \varphi \Rightarrow A = \varphi$ e) $A \cup \varphi = \varphi$
c) $A \cup \varphi = \varphi \cup A = A$ f) $A \cap \varphi = A$

I.1.7. Dacă $A \subset T$, numim complementara mulțimii A în raport cu T și o notăm prin $\complement_T A$ sau $\bar{A}$, mulțimea: $\complement_T A = \{x \mid x \in T$ și $x \notin A\}$. Care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate, și care sînt false?

a) $\complement_A A = A$ e) Dacă $A \subset B \Rightarrow \complement_T A \supset \complement_T B$
b) $\complement_A A = \varphi$ f) Dacă $A \subset B \Rightarrow \complement_T A \subset \complement_T B$
c) $\complement_A \varphi = \varphi$ g) Dacă $A = B \Leftrightarrow \complement_T A = \complement_T B$
d) $\complement_A \varphi = A$ h) $\bar{\bar{A}} = A$ (complementara este involutivă)

I.1.8. Fiind dată o mulțime A, prin mulțimea părților lui A vom înțelege o mulțime ale cărei elemente sînt toate submulțimile mulțimii A și o vom nota prin $\mathcal{P}(A)$. Dacă mulțimea $A = \{x, y, z\}$ atunci mulțimea $\mathcal{P}(A)$ conține:

a) $2 \cdot 3$ elemente
b) 3^2 elemente
c) 2^3 elemente

I.1.9. Notăm: $N = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ mulțimea numerelor naturale; $N^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ mulțimea numerelor naturale, din care s-a scos 0, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm n, ...\}$ mulțimea numerelor întregi, $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z - \{0\}\right\}$ mulțimea numerelor raționale, R mulțimea numerelor reale, $I = R - Q$ mulțimea numerelor iraționale. Să se precizeze

care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false?

a) $\pi \in R$
b) $\pi \in Q$
c) $\pi \in I$
d) $-2 \in Q$
e) $10{,}5 \in Q$
f) $-\frac{2}{3} \in I$
g) $\sqrt{2} \in I$
h) $\sqrt{2} \in Q$
j) $+2\sqrt{2} \in I$
k) $2\sqrt{3} \in I$
l) $2\sqrt{3} \in R$

I.1.10. Fie N mulțimea numerelor naturale, Z mulțimea numerelor întregi, Q mulțimea numerelor raționale, I mulțimea numerelor iraționale, R mulțimea numerelor reale, C mulțimea numerelor complexe.

Să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi.

I.1.11. Fie P mulțimea poligoanelor, T mulțimea triunghiurilor, A mulțimea triunghiurilor ascuțitunghice, B mulțimea triunghiurilor echilaterale, C mulțimea triunghiurilor dreptunghice.

Care din următoarele relații sînt adevărate și care sînt false?

1°. $A \cup B \cup C \subset T \subset P$;
2°. $A \cap B = B$;
3°. $B \cap C = \Phi$;
4°. $C \cap A = C$;
5°. $T \cap P = T$;
6°. $(B \cap P) \cup (T \cap C) = \Phi$.

Exerciții și probleme propuse

I.1.12. Fie P_1 mulțimea poligoanelor, P_2 mulțimea patrulaterelor, P_3 mulțimea paralelogramelor, P_4 mulțimea dreptunghiurilor, P_5 mulțimea romburilor, P_6 mulțimea pătratelor, P_7 mulțimea trapezelor.

a) Să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi.

b) Să se determine: $P_1 \cup P_2$; $P_1 \cap P_2$; $P_2 \cap P_3$;

$$P_4 \cup P_6; \quad P_4 \cap P_6; \quad \bigcup_{i=2}^{6} P_i.$$

1.1.13. Fie mulțimile:

A = {Mulțimea multiplilor lui $3 < 37$};
B = {Mulțimea numerelor prime < 20};
C = {Mulțimea multiplilor lui $2 < 20$};

1°. Să se enumere elementele acestor mulțimi.
2°. Să se afle $A \cap B$, $(A \cup C) \cap B$.

1.1.14. Să se determine mulțimea:

$A = \{(x, y) \mid x \in N, \; y \in N, \; x + y = 60, \; (\overline{x, y}) = 6\}$ unde (x, y) este cel mai mare divizor comun al numerelor x și y.

(G.M.B., 1969).

1.1.15. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se scrie toate submulțimile lui A astfel ca mulțimea $\{1, 2, 3\}$ să fie inclusă în acele submulțimi.

1.1.16. O mulțime A are a elemente, iar o mulțime B are b elemente.

Se cere:

1°. Dacă $A \cap B$ are x elemente, cîte elemente are $A \cup B$?
2°. Dacă $A \cup B$ are y elemente, cîte elemente are $A \cap B$?

1.1.17. Notînd: N — mulțimea numerelor naturale;

$$A = \{2n \mid n \in N\};$$
$$B = \{3n \mid n \in N\};$$
$$C = \{6n \mid n \in N\};$$
$$D = \{3n + 1 \mid n \in N\};$$
$$E = \{3n + 2 \mid n \in N\}.$$

1°. Să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi.

2°. Să se determine mulțimile: $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $D \cup E$,

$$(A \cap C) \cup B, \quad A \cap (C \cup B).$$

I.1.18. Fie mulțimile: $X_1 = \{x_1\}$; $X_2 = \{x_1, x_2\}$;
$X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$;
$X_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

1°. Să se scrie submulțimile mulțimilor

$$X_i (i = 1, 2, 3, 4).$$

2°. Cîte elemente are mulțimea $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$?

I.1.19. Fie mulțimile: $A = \{0, 1, 5\}$; $B = \{1, 5, 7\}$;
$C = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$.

a) Să se afle: a) $(A \cup B)$;
b) $(A \cup B) \cap C$;
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;
d) $A \cup C$;
e) $B \cup C$;
f) $(A \cup B) \cap C$.

I.1.20. Se consideră mulțimile: $A \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $B = \{a, c, e, g\}$; $C = \{a, b, e\}$; $D = \{d, g, h\}$.

Care din afirmațiile ce urmează sînt adevărate și care sînt false?

1°. $A = B$;
2°. $A \subset B$;
3°. $B \subset A$;
4°. $A \subset B$;
5°. $D \subset A$;
6°. $A \subset A$.

I.1.21. Fie mulțimile: $A = \{a, b, c\}$;
$B = \{d, e\}$.

Să se determine:

1°. $A - B$;
2°. $B - A$;
3°. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (diferența simetrică).

I.1.22. Fie mulțimile A, E, $A \subset E$. Complementara mulțimii A în raport cu mulțimea E o vom nota $\complement_E A$ și este prin definiție următoarea mulțime: $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Să se arate că:

1°. $\complement_E \phi = E$;
2°. $\complement_E E = \phi$;
3°. $\complement_E \complement_E A = A$;
4°. $A \cup \complement_E A = E$;
5°. $A \cap \complement_E A = \phi$.

I.1.23. Fie mulțimile $A, B \in \mathcal{P}(E)$ (A și B aparțin mulțimii părților lui E). Considerînd complementarele în raport cu E să se demonstreze:

1°. $A - B = A \cap \complement B$
2°. $A \Delta B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$

I.1.24. Fie E o mulțime și A, B părți ale lui E. Considerînd complementarele în raport cu E să se demonstreze egalitățile:

1°. $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$;
2°. $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$.

(Aceste două egalități poartă numele de formulele lui De Morgan.)

I.1.25. Produsul cartezian a două mulțimi se notează $A \times B$ și este prin definiție:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Fie mulțimile: $A = \{a, b\}$; $B = \{a, c\}$. Să se determine:
1°. $A \times B$; 2°. $B \times A$; 3°. A^2; 4°. B^2.

I.1.26. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{0, 2, 4\}$. Să se determine:
1°. $A \times B$; 2°. $B \times A$; 3°. $(A \times B) \cap (B \times A)$; 4°. $(A \times B) \cup (B \times A)$; 5°. A^2; 6°. B^2.

I.1.27. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Să se formeze A^2. Care este diagonala lui A^2?

I.1.28. Fie $A = \{-1, 0, 2\}$; $B = \{-2, 0{,}5\}$. Să se determine:
1°. $A \times B$; 2°. $B \times A$; 3°. $(A \times B) \cap (B \times A)$, 4°. A^2; 5°. B^2.

I.1.29. Se notează prin:

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$
$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leqslant b\};$$
$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \in R \mid -\infty < x < a\};$$
$$(a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x < +\infty\}.$$

Fie mulțimile: $A = [2, 3]$;
$B = (-\infty, 1)$;
$C = [0, +\infty)$.

Să se determine: 1°. $A \cap B$; 2°. $A \cup B$;
3°. $B \cap C$; 4°. $A \cup B \cup C$.

I.1.30. Să se enumere elementele următoarelor mulțimi:
1°. $A = \{x \in Z \mid 1 < x < 3\}$;
2°. $B = \{x \in Z \mid 1 < x \leqslant 7\}$;
3°. $C = \{x \in N \mid 4 < x^2 \leqslant 25\}$;
4°. $D = \{x \in R \mid x^2 + x + 1 = 0\}$;
5°. $E = \{x \in Q \mid x^2 - 9 = 0\}$;
6°. $F = \{x \in Z \mid 4 < x^2 \leqslant 25\}$.

I.1.31. Fie mulțimile: $A = [-5, 0) \cup [4, 8)$;
$B = (-3, 4] \cup (7, 19]$.

Să se determine: 1°. $A \cap B$;
2°. $A \cup B$.

I.1.32. Fie mulțimea $A = (2, 10)$.
Să se determine:

$$\left\{x \in A \mid \frac{3x+7}{6} - x < \frac{x}{4} \text{ și } \frac{3x-5}{2} \leqslant x\right\}.$$

I.1.33. Fie mulțimea $A = (-3, 4]$.
Să se determine:

$$\left\{x \in A \mid \frac{x+1}{3} < x - 2 \text{ sau } \frac{x-2}{x+2} \leqslant 3\right\}.$$

I.1.34.* Să se determine mulțimile A, B, C știind că:
1°. $A \cap C = \{2, 5, 6\}$;
2°. $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6\}$;
3°. $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4\}$;
4°. $B - C = \{1\}$.

(G.M.B., 1973.)

I.1.35.* Fie $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Considerînd complementarele în raport cu E să se determine mulțimile E, A, B știind că:
1°. $\complement A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 3°. $A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$;
2°. $\complement B = \{1, 5, 6, 7\}$; 4°. $A \cap B = \{8, 9, 10\}$.

I.1.36.* Fie A și B două submulțimi ale mulțimii $\{a, b, c, d, e, f, g, h, j\}$ și relațiile:

1°. $A \cap B = \{d, f, j\}$;
2°. $A \cup \{c, d, e\} = \{a, c, d, e, f, h, j\}$;
3°. $B \cup \{d, h\} = \{b, c, d, e, f, g, h, j\}$.
Să se determine mulțimile A și B.

I.1.37. Să se determine mulțimile A și B care satisfac condițiile:

1°. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
2°. $A \cap B = \{1, 2, 3\}$;
3°. $A - B = \{4, 6\}$.

I.1.38. Să se determine mulțimile A și B știind că satisfac condițiile:

1°. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
2°. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$;
3°. $\{6\} \not\subset A - B$
4°. $\{5\} \not\subset B - A$.

I.1.39. Fiind date mulțimile A, B, C, să se verifice relațiile: 1°. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$;
2°. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

I.1.40. Fiind date mulțimile A, B, C, să se demonstreze că:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C).$$

I.1.41.* Fiind date mulțimile A, B, C să se verifice următoarele proprietăți:

1°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (intersecția este distributivă față de reuniune);

2°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (reuniunea este distributivă față de intersecție).

I.1.42. Dacă $x, y \in R_+$ să se arate că

1°. $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$;

2°. $\dfrac{x+y}{2x} < \dfrac{2y}{x+y}$;

3°. $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy}$ (media armonică $\leqslant$ media geometrică);

4°. $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ (media geometrică $\leqslant$ media aritmetică);

5°. $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geqslant \sqrt{xy} - \frac{2xy}{x+y}$.

I.1.43. Să se arate că pentru orice numere pozitive x, y, z au loc inegalitățile:

1°. $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$;

2°. $xyz > (x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)$;

3°. $x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz$.

I.1.44. Dacă $ab + bc + ca = 1$ atunci $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{5}$.

I.1.45.* Dacă $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ sînt numere reale verificînd relația:

$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = 0$ atunci există inegalitatea:

$(\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3)^2 - 4(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3)(\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3) > 0$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

I.1.46.* Să se demonstreze că oricare ar fi $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ are loc inegalitatea:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_1^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

(Cauchy-Buniakovski-Schwarz).

Să se generalizeze.

I.1.47.* Să se demonstreze că oricare ar fi $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in R$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

(Minkovski)

I.1.48. Fie a, b, c laturile unui triunghi. Să se arate că:

I. $a^2 < 2(b^2 + c^2)$;

II. Să se dea și o soluție geometrică a relației de mai sus.

III. Să se generalizeze pentru un poligon oarecare.

I.1.49. Pentru $n > 3$, $n \in N$ să se arate că $n^{n+1} > (n + 1)^n$.

I.1.1. *a, c, d, e, g* sînt adevărate.

I.1.2. *a, c,* false.

I.1.3. $B = \{1, 2, 5, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, *a, b, c, f, g, h, j,* adevărate. Precizăm că „două mulțimi A și B sînt egale și scriem $A = B$ dacă și numai dacă $A \subset B$ și $B \supset A$". Proprietățile $A \cup A = A$ și $A \cap A = A$ (idempotența reuniunii și a intersecției) sînt adevărate pentru orice mulțime A.

I.1.4. $A = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 6\}$, $D = \{1, 2, 3, 6\}$, *a, b, c, d,* adevărate.

I.1.5. *a, c,* adevărate.

I.1.6. *a, b, c, d,* adevărate.

I.1.7. *b, d, e, g, h,* adevărate. Menționăm că se folosește pentru complementară notația $\bar{A}$, atunci cînd nu este nici un dubiu asupra mulțimii totale T.

I.1.8. *c,* adevărată, $\mathcal{P}(A) = \{\{\Phi\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$. În general, dacă mulțimea A conține n elemente, atunci $\mathcal{P}(A)$ conține 2^n elemente.

I.1.9. *a, c, d, e, g, j, k, l,* adevărate.

I.1.10. 1°. $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$; $Q \cup I = R$.

I.1.11. Relațiile 4 și 6 sînt false.

2*

1.1.13. 1°. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$;
$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.

2°. $A \cap B = \{3\}$;
$(A \cup C) \cap B = \{2, 3\}$.

1.1.14. Se scriu toate perechile de numere naturale a căror sumă este 60, iar apoi se aleg acele perechi care au cel mai mare divizor comun egal cu 6 și obținem:

$$A = \{(6, 54), (18, 42), (54, 6), (42, 18)\}.$$

1.1.15. $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 2, 3, 5\}$; $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.1.16. Notăm prin A', B', C' numărul elementelor situate în porțiunile respective din figura 1. Conform enunțului avem relațiile:

$$\begin{cases} A' + C' = a \\ B' + C' = b \\ C' = x \end{cases} \Rightarrow A' = a - x,\ B' = b - x,.$$ Cum $A \cup B$ conține $A' + B' + C'$ elemente $\Rightarrow A \cup B$ conține $a - x + b - x + x = a + b - x$ elemente. Analog se obține că $A \cap B$ conține $a + b - y$ elemente.

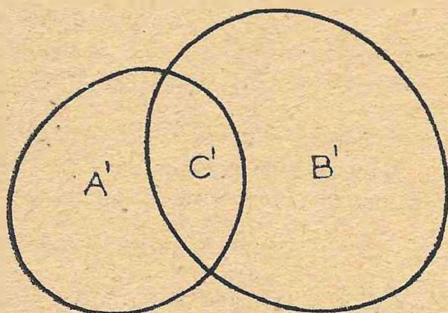


Fig. 1

I.1.17. 1°. $C \subset B$; $C \subset A$.

2°. $A \cap B = C$; $C \subset A \Rightarrow A \cup C = A$; $C \subset A \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cap C = C$; $D \cup E = N - (B \cup \{1, 2\})$;
$(A \cap C) \cup B = C \cup B = B$; $A \cap (B \cup C) =$
$= A \cap B = C$.

I.1.18. 1°. X_1 are submulțimile $\{\Phi\}$, $\{x_1\}$;
X_2 are submulțimile $\{\Phi\}$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_1, x_2\}$;
X_3 are submulțimile $\{\Phi\}$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$;
X_4 are submulțimile $\{\Phi\}$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_4\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_2, x_4\}$.

2°. Observăm că X_1 are 2^1 submulțimi, X_2 are 2^2 submulțimi etc. Prin inducție completă se demonstrează că X_n are 2^n submulțimi.

I.1.21. $A - B = \{a, b, c\}$.
$B - A = \{d, e\}$.

I.1.22. Toate relațiile rezultă din definiția dată.

I.1.23. 1°. Egalitatea rezultă imediat din definițiile diferenței a două mulțimi și complementarei unei mulțimi.

2°. Egalitatea rezultă imediat ținînd seama de faptul că $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

I.1.24. 1°. Pentru a demonstra egalitatea va trebui să demonstrăm două incluziuni și anume $\complement(A \cup B) \subset (\complement A) \cap (\complement B)$ și $(\complement A) \cap (\complement B) \subset \complement(A \cup B)$ din care rezultă egalitatea.

a) Fie un element oarecare $x \in \complement(A \cup B) \Rightarrow x \in E$ și $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ și $x \notin B \Rightarrow x \in \complement A$ și $x \in \complement B$ adică $x \in (\complement A) \cap (\complement B)$. Am demonstrat deci că $\complement(A \cup B) \subset$ $\subset (\complement A) \cap (\complement B)$.

b) Fie un element oarecare $x \in (\complement A) \cap (\complement B) \Rightarrow x \in \complement A$ și $x \in \complement B \Rightarrow x \notin A$ și $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \complement(A \cup B)$. Din cele două incluziuni rezultă egalitatea. Analog se demonstrează egalitatea a doua.

I.1.25. 1° $A \times B = \{(a; a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$;
2°. $B \times A = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b)\}$.
Se observă că $A \times B \neq B \times A$.
3° $A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
4°. $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)\}$.

I.1.26. 1°. $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 4)\}$.
2°. $B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.
3°. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{2, 2)\}$.
5°. $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.
6°. $B^2 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (4, 0), (4, 2), (4, 4)\}$.

I.1.27. $A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$.
Numim diagonala lui A^2 mulțimea perechilor de forma $\{(x, x) \mid x \in A$ și $x \in A\}$.
Diagonala lui $A^2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.

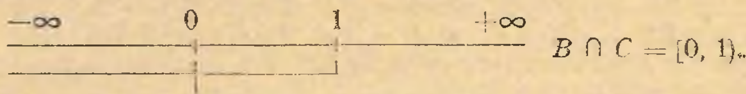
I.1.28. 1°. $A \times B = \{(-1, -2), (-1, 0), (-1, 5), (0, -2), (0, 0), (0, 5), (2, -2), (2, 0), (2, 5)\}$.
2°. $B \times A = \{(-2, -1), (-2, 0); (-2, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (5, -1), (5, 0), (5, 2)\}$.
3°. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(0, 0)\}$.
4°. $A^2 = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (0, -1), (0,0), (0, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 2)\}$.
5° $. B^2 = \{(-2, -2), (-2, 0), (-2, 5), (0, -2) (0, 0), (0, 5), (5, -2), (5, 0), (5, 5)\}$.

I.1.29. 1°. Folosim metoda grafică



$A \cap B = \Phi$.

2°. $A \cup B = (-\infty, 1) \cup [2, 3]$.



$B \cap C = [0, 1)$.

I.1.30. 1°. $A = \{2\}$; 2°. $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; 3°. $C = \{3, 4, 5\}$; 4°. $D = \Phi$; 5°. $E = \{-3, 3\}$; 6°. $F = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\}$.

I.1.31. 1°. Soluție grafică



Deci $A \cap B = (-3, 0) \cup \{4\} \cup (7, 8)$.
2°. $A \cup B = [-5, 19]$.

I.1.32. $x \in (2, 5]$.

I.1.33. $x \in (-2, 4]$.

I.1.34. *Soluția I.* Folosim egalitatea $(B \cup C) - (B - C) = C$.

Din 2° și 4° rezultă $C = \{2, 3, 5, 6\}$. Din $4° \Rightarrow 1 \in B$ și $1 \notin C$ și deoarece $1 \notin (A - B) \cup (B - A)$ rezultă $1 \in A$. Dar $4 \notin B \cup C$ deci $4 \notin B$ și $4 \notin C$ însă $4 \in (A - B) \cup (B - A)$ deci $4 \in A$.

Din 1°. $\{2, 5, 6,\} \subset A$ rezultă: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$;
$C = \{2, 3, 5, 6\}$;
$B = \{1, 3, 5, 6\}$.

Soluția II. Considerînd mulțimile disjuncte x, y, z, t, u, v, w (figura 2) există relațiile:

(1) $y \cup u = \{2, 5, 6\}$.
(2) $y \cup z \cup u \cup v \cup t \cup w = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
(3) $x \cup y \cup v \cup w = \{2, 3, 4\}$,
(4) $t \cup w = \{1\}$.

Din relațiile (2) și (4) rezultă: $\{x \cup y \cup v \cup w\} \cap \{t \cup w\} = \Phi \Rightarrow w = \Phi$.

Din relația (4) rezultă $t = \{1\}$. Din relațiile (1) și (3) rezultă: $\{y \cup u\} \cap \{x \cup y \cup v \cup w\} = \{2\}$. Deci $y = \{2\}$. Din relația (1) rezultă: $\{u\} = \{5, 6\}$. Se obțin apoi $z = \Phi$, $x = \{4\}$, $v = \{3\}$ și mulțimile A, B, C.

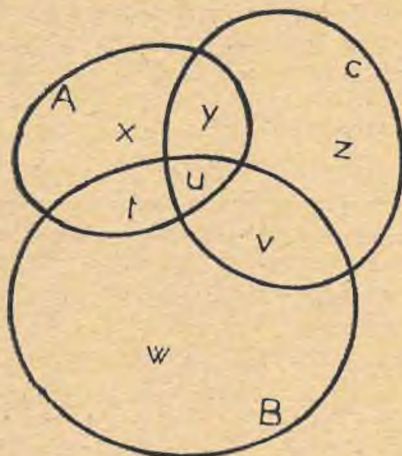


Fig. 2

1.1.35. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
$A = \{7, 8, 9, 10\}$;
$B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

1.1.36. $A = \{a, d, f, h, j\}$;
$B = \{b, c, d, e, f, g, j\}$.

1.1.37. $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
$B = \{1, 2, 3, 5\}$.

1.1.38. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

1.1.39. 1°. $x \in (A - B) \cup (B - A) \Leftrightarrow (x \in A - B$ sau $x \in B - A)$; $x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A$ și $x \notin B)$; $x \in A \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cup B$; deoarece $x \notin B$ avem și $x \notin A \cap B$. Din $x \in A \cup B$ și $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Analog ajungem la același rezultat și dacă $x \in B - A$. Reciproc, $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \cup B$ și $x \notin A \cap B)$; $x \in$ $\in A \cup B \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$; $x \notin A \cap B \Rightarrow (x \notin A$ sau $x \notin B)$; din $(x \in A$ sau $x \in B)$ și $(x \notin A$ sau $x \notin B) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x \in A$ și $x \notin A)$ sau $(x \in A$ și $x \notin B)$ sau $(x \in B$

și $x \notin A$) sau ($x \in B$ și $x \notin B$) de unde ($x \in A$ și $x \notin B$) sau ($x \in B$ și $x \notin A$) adică $x \in (A - B)$ sau $x \in (B - A)$ deci $x \in (A - B) \cup (B - A)$.

2°. $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A$) și $x \notin B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ și ($x \notin B$ și $x \notin C$) $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ și $x \notin B$) și ($x \in A$ și $x \notin C$) $\Leftrightarrow x \in A - B$ și $x \in A - C \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$.

1.1.40. Fie perechea ordonată $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ sau $(x, y) \in A \times C \Rightarrow (x \in A)$ și ($y \in B$ sau $y \in C$); adică $x \in A$ și $y \in B \cup C \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)$.

Rezultă deci că: $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$.

Pentru a avea egalitate se demonstrează analog că

$$A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C).$$

1.1.41. 1°. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ și $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ și ($x \in B$ sau $x \in C$) $\Leftrightarrow x \in A \cap B$ sau $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Am demonstrat simultan cele două incluziuni.

2°. $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ sau ($x \in B$ și $x \in C$) $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ sau $x \in B$) și ($x \in A$ sau $x \in C$) $\Leftrightarrow x \in A \cup B$ și $x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.1.42. 1°. 2°. Revin la $(x - y)^2 > 0$.

3°. 4°. Se ține seama de inegalitatea evidentă $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.

5°. La 4° s-a arătat că media aritmetică $\geq$ media geometrică și aplicînd această proprietate la medii avem:

$$\frac{m_{aritm.} + m_{arm.}}{2} \geq \sqrt{m_{aritm.} \cdot m_{arm.}}$$

de unde rezultă $m_{aritm.} + m_{arm.} \geq 2m_{geom.}$ etc.

Observație. Inegalitatea 2° este adevărată pentru orice $x, y \in R$ pentru care $x(x + y) < 0$.

1.1.43. 1°. Trecem toți termenii în membrul întîi, amplificăm cu 2 și punem în evidență un pătrat perfect.

2°. Se pornește de la inegalitățile evidente:

$$x^2 > x^2 - (y - z)^2; \; y^2 > y^2 - (x - z)^2;$$
$$z^2 > z^2 - (x - y)^2.$$

Membrii din dreapta se descompun în produs de sumă prin diferență etc.

3°. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$

$$= \frac{(x + y + z)\,[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]}{2}.$$

I.1.44. Se pornește de la $(a - 2b)^2 \geqslant 0$; $(b - 2c)^2 \geqslant 0$; $(c - 2a)^2 \geqslant 0$. Se ridică la pătrat, se însumează și se obține: $5(a^2 + b^2 + c^2) > 4(ab + bc + ca)$, se ține apoi seama de condiția din enunț.

I.1.45. După efectuarea calculelor în prima parte a inegalității se ordonează în raport cu α, β, γ.

Ținîndu-se seama de relațiile de condiție obținem:

$$[\alpha(a_1 - c_1) + \beta(a_2 - c_2) + \gamma(a_3 - c_3)]^2 > 0.$$

I.1.46. 1°. Se observă că trinomul de gradul II $(a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)\,x + b_1^2 + b_2^2$ se scrie ca o sumă de pătrate și deci este pozitiv oricare ar fi $x \in R$. Deci $\Delta \leqslant 0$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

2°. Analog se demonstrează inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

I.1.47. Se consideră egalitatea: $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$, apoi termenului $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$ i se aplică inegalitatea Cauchy — Buniakovski — Schwarz ceea ce conduce la majorarea membrului drept al egalității anterioare cu $(\sqrt{\Sigma a_k^2} + \sqrt{\Sigma b_k^2})^2$.

I.1.48. I. Evident că $a < b + c$. Ridicînd la pătrat rezultă $a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$. Cum $2bc < b^2 + c^2$ rezultă că

$$a^2 < b^2 + c^2 + b^2 + c^2.$$

II. Pentru soluția geometrică se consideră expresia medianei:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

III. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cele n laturi ale unui poligon $a_1 < \sum_{i=2}^{n} a_i$. Se ridică la pătrat, iar în partea dreaptă se înlocuiesc produsele $2a_i a_j$ prin $a_i^2 + a_j^2$.

Rezultă în final inegalitatea:

$$a_1^2 < (n - 1) \cdot (a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2).$$

I.1.49. 1°. Împărțind prin n^n inegalitatea devine $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, care este verificată pentru $n = 3$. Dacă n crește cu o unitate, membrul drept crește cu 1 iar membrul stîng cu o cantitate mai mică decît 1. Deci inegalitatea se menține.

1.2. FUNCȚIA MODUL. PUTERI ÎNTREGI, RAȚIONALE, REALE. RADICALI

1.2.1. Exerciții de învățămînt programat

Fie funcțiile f, g, h, definite pe R cu valori în $[0, +\infty)$;

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ pentru } x>0, \\ 0 \text{ pentru } x=0. \\ -x \text{ pentru } x<0. \end{cases} \quad ; \quad g(x)=$$

$$=\begin{cases} x \text{ pentru } x\geqslant 0, \\ -x \text{ pentru } x<0. \end{cases} \quad ; \quad h(x)=\begin{cases} x \text{ pentru } x>0; \\ -x \text{ pentru } x\leqslant 0. \end{cases}$$

Care din afirmațiile următoare sînt adevărate și care sînt false?

a) $f \neq g$
b) $f \neq h$
c) $h \neq g$
d) $f = g = h$

Observație: În continuare vom lua ca definiție a modulului funcția g, adică

$$|x|=\begin{cases} x \text{ pentru } x\geqslant 0, \\ -x \text{ pentru } x<0. \end{cases}$$

1.2.2. Care din următoarele afirmații sînt echivalente

a) $|x| \leqslant a$
b) $x \leqslant -a$ și $x \geqslant a$
c) $-a \leqslant x \leqslant a$
d) $|x| \geqslant a$.

1.2.3. Să se specifice care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate.

a) $|x| = \max(-x, x)$
b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
c) $|x| = |-x|$
d) $|x| \geqslant 0$

1.2.4. Pentru $n \geqslant 2$, $n \in N$ și $a \in [0, +\infty)$ se numește $\sqrt[n]{a}$ soluția pozitivă, unică, a ecuației $x^n = a$. Să se menționeze, care din proprietățile de mai jos sînt adevărate:

a) $\sqrt[n]{0} = 0$; $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$

b) $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

d) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

e) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

f) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ cu $b \neq 0$.

1.2.5. Dacă $a > 0$; $p, q \in Q$, să se specifice care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate.

a) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

b) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

c) $(a^p)^q = a^{pq}$

d) $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$

e) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Exerciții și probleme propuse

1.2.6. Să se determine următoarele mulțimi:
$A = \{x \in R \mid x + |x - 1| = 4\}$;
$B = \{x \in R \mid |x - 1| + |x - 2| = 3\}$;

$C = \{x \in R \mid 2x - |x| + |x+5| = 1\}$;
$D = \{x \in R \mid 5x + |x| + |x-1| + |x-2| = 1\}$;
$E = \{x \in R \mid |x+1| + |x-2| - |x+2| = 0\}$;
$F = \{x \in R \mid 3|x| + 1 = 5x - 2\}$
$G = \left\{x \in R \,\middle|\, \frac{|x|+2}{2} = 3|x| + 1\right\}$;
$H = \{x \in R \mid 2x - 3 = |x-5| + 1\}$;
$L = \{x \in R \mid -5|x| + 8 = 7 - 3x\}$;
$P = \{x \in R \mid |x| - 2 = 5|x| - 1\}$;
$M_1 = \{(x, y) \in Z \times Z \mid |x| + |y| = 12$ și $x + y = 2\}$;
$M_2 = \{(x, y) \in Z \times Z \mid 2|x| + 3|y| = 13$ și $|x + y| = 5\}$;
$M_3 = \{(x, y) \in N \times N \mid 2|x| + 3|y| = 13$ și $|x + y| = 5\}$;
$M_4 = \{(x, y) \in Z \times Z \mid 3|x| + 2y = 1$ și $x + 3|y| = 15\}$;
$M_5 = \{(x, y) \in Z \times Z \mid |x| + |y| = 13$ și $|3x + y| = 19\}$.

(G.M.B. 1971)

1.2.7. Să se exprime cu ajutorul modulelor următoarele inegalități:

1°. $y - 5 < x < y + 5$;
2°. $-2 < x < 6$;
3°. $-1 < x < 11$;
4°. $x \geqslant 5 - y$ sau $x \leqslant -y - 5$.

Să se traseze graficele următoarelor funcții:

1.2.8. $f(x) = |x+1| + |x-1|$.

1.2.9. $f(x) = |x| - x$.

1.2.10. $f(x) = x + |x|$.

1.2.11. $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$.

1.2.12.* $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{dacă } |x| \leqslant 1. \\ 0 & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$

Să se afle soluțiile (algebric și grafic):

I.2.13. $|x-2| \leqslant 1.$

I.2.14. $x + |x-1| < 1.$

I.2.15. $|x+2| \geqslant 3$

I.2.16. $|x+3| - |x+1| < 2.$

I.2.17. *Să se efectueze:*

1°. $8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}};$

2°. $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48};$

3°. $\left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\left(x\sqrt{\frac{y}{x}} - y\sqrt{\frac{x}{y}}\right);$

4°. $(2\sqrt{32} + 3\sqrt{2} + 4) : 8\sqrt{2};$

5°. $\left(\sqrt{1-y} + \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right);$

$y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty);$

6°. $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{2});$

I.2.18. *Să se efectueze operațiile aducînd expresiile de mai jos la o formă mai simplă:*

1°. $\left(\frac{a+b}{c-x}\right)^m \cdot \left(\frac{c+x}{a+b}\right)^m \cdot \left(\frac{c-x}{a-b}\right)^m;$

2°. $(x^{\frac{7}{2}} - x^3 + x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1);$

3°. $(a^2 - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}) : (a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}});$

4°. $\left(\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{y}}} + \sqrt[r]{a^{\frac{1}{y}}\,b} + 2\sqrt{\sqrt[r]{b}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[r]{a^{x-2r}}}}}\right)^{\frac{1}{2}};$

5°. $(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}) : (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}).$

I.2.19. *Pentru transformarea radicalilor dubli se cunoaște identitatea:*

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad \text{unde } C = \sqrt{A^2 - B}.$$

Folosind formula de mai sus să se transforme expresiile următoare în sume sau diferențe de doi radicali:

1°. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$;

2°. $\frac{R}{4}\sqrt{6 + \sqrt{20}}$;

3°. $\sqrt{28 + 5\sqrt{12}}$;

4°. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$;

5°. $\sqrt{a + ab - 2a\sqrt{b}}$;

6°. $\sqrt{3 + 2a\sqrt{3 - a^2}}$;

7°. $\sqrt{2x - y + 2\sqrt{x^2 - xy}}$;

8°. $\sqrt{2x^2 - x\sqrt{4x^2 - y^2}}$;

I.2.20. *Să se raționalizeze numitorii următoarelor expresii:*

1°. $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

2°. $\dfrac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$;

3°. $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

4°. $\dfrac{a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}}$;

5°. $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

6°. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$;

7°. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}}$;

8°. $\dfrac{A}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}}$;

9°. $\dfrac{1}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}}$;

10°. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$;

11°. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$.

I.2.21. *Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:*

1°. $E=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}}$;

2°*. $E=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}-$

$-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}$;

3°. $E=\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$; (Bertrand)

4°. $E=\dfrac{x^2+2x+2x\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}}{x^2-x+x\sqrt{y}-\sqrt{y}}$;

5°. $E=\dfrac{x^3-12x+(x^2-4)\sqrt{x^2-16}+16}{x^3-12x+(x^2-4)\sqrt{x^2-16}-16}$;

6°. $E = \dfrac{a - a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$;

7°. $E = \dfrac{a - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$.

8°. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}}{\sqrt{\dfrac{x + \sqrt{x^2+a^2}}{x - \sqrt{x^2-a^2}}}}$

I.2.22.* Să se pună sub forma $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0$ ecuația:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yx - 6xz - 4xy = 0.$$

I.2.23.* Să se arate că expresia:

$$E = \frac{(x + \sqrt[3]{xyz})(y + \sqrt[3]{xyz})}{(x - \sqrt[3]{xyz})(y - \sqrt[3]{xyz})} + \frac{(y + \sqrt[3]{xyz})(z + \sqrt[3]{xyz})}{(y - \sqrt[3]{xyz})(z - \sqrt[3]{xyz})} +$$
$$+ \frac{(z + \sqrt[3]{xyz})(z + \sqrt[3]{xyz})}{(z - \sqrt[3]{xyz})(x - \sqrt[3]{xyz})}$$

este independentă de x, y, z.

I.2.24.* Fie: $E_1 = \dfrac{(1+\sqrt{1-x^m})^n + (1+\sqrt{1-x^n})^m}{(1-\sqrt{1-x^m})^n + (1-\sqrt{1-x^n})^m}$;

$$E_2 = \frac{(1+\sqrt{1-x^m})^n - (1+\sqrt{1-x^n})^m}{(1-\sqrt{1-x^m})^n - (1-\sqrt{1-x^n})^m}.$$

Să se arate că pentru m, $n \in N$ și pentru $x \in R$, pentru care expresiile de mai sus au sens, $E_1 + E_2 = 0$.

(G.M.B. 1956.)

I.2.25.* Să se arate că

$$\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+$$
$$+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}$$

este un număr rațional.

I.2.26.* Să se calculeze expresia:

$$E=\frac{\sqrt[p]{x}+\sqrt[2p]{x}+\ldots+\sqrt[kp]{x}-k}{\sqrt[n]{x}+\sqrt[2n]{x}+\ldots+\sqrt[kn]{x}-k}$$

pentru $x=1$.

I.2.27. Fie polinomul $P(x)=x^3+3px+2q$.
Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru:

$$x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$$

(Admitere, A.S.E.)

Să se calculeze expresiile:

I.2.28. $E(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ pentru $x=\dfrac{4a}{a^2+4}$, $x\in[-1,\ 1]$.

I.2.29. $E(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}$

pentru $x=\sqrt{\dfrac{b(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)}}$.

I.2.30. $E(a,b)=\sqrt{3a^2-5ab+3b^2}$ pentru $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

și $b=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

1.2.31. $E(x) = \dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ pentru $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$.

(Admitere, A.S.E., București, 1969)

1.2.32. $E(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{y+1}}$

pentru $x = \dfrac{2a^2-2a+3}{a^2+2}$, $y = \dfrac{-4a+2}{a^2+2}$, $a \in R$.

I.2.1. Afirmația d) este adevărată. De fapt, cele trei funcții constituie tocmai definiția lui $|x|$. Evident cele trei definiții sînt echivalente.

I.2.2. $a \Leftrightarrow c$ și $b \Leftrightarrow d$.

I.2.3. Toate afirmațiile sînt adevărate.

I.2.4. Toate proprietățile sînt adevărate.

I.2.5. Toate afirmațiile sînt adevărate.

I.2.6. $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ pentru } x \in [1, +\infty), \\ 1-x \text{ pentru } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$

Deci pentru $x \in [1, +\infty)$ ecuația devine: $x + x - 1 = 4$; $x = \frac{5}{2}$, pentru $x \in (-\infty, 1)$ ecuația devine $x + 1 - x = 4$; $1 = 4$; imposibil.

Deci $A = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ pentru } x \in [1, +\infty), \\ 1-x \text{ pentru } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ pentru } x \in [2, +\infty), \\ 2-x \text{ pentru } x \in (-\infty, 2). \end{cases}$$

Pentru $x \in (-\infty, 1)$ ecuația devine $1 - x + 2 - x = 3 \Rightarrow x = 0$.

Pentru $x \in [1, 2)$ ecuația devine $x - 1 + 2 - x = 3$; imposibil.

Pentru $x \in (2, +\infty)$ ecuația devine $x - 1 + x - 2 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$.

Deci $B = \{0, 3\}$.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ pentru } x \in [0, +\infty), \\ -x \text{ pentru } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5 \text{ pentru } x \in [-5, +\infty), \\ -x - 5 \text{ pentru } x \in (-\infty, -5). \end{cases}$$

Pentru $x \in (-\infty, -5)$ ecuația devine $2x + x - x - 5 = 1$; $x = 3 \notin (-\infty, -5)$.

Pentru $x \in [-5, 0)$ ecuația devine $2x + x + x + 5 = 1$; $x = -1$.

Pentru $x \in [0, +\infty)$ ecuația devine $2x - x + x + 5 = 1$; $x = -2 \notin [0, +\infty)$.

Deci $C = \{-1\}$.

Ținînd seama de expresiile modulelor vom avea:

Pentru $x \in (-\infty, 0)$ ecuația devine $5x - x + 1 - x + 2 - x = 1 \Rightarrow x = -1$.

Pentru $x \in [0, 1)$ ecuația devine $5x + x + 1 - x + 2 - x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin [0, 1)$.

Pentru $x \in [1, 2)$ ecuația devine $5x + x + x - 1 + 2 - x = 1 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 2)$.

Pentru $x \in [2, +\infty))$ ecuația devine $5x + x + x - 1 + x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin [2, +\infty)$.

Deci $D = \{-1\}$.

Analog se obțin: $E = \{1, 3\}$.

$$F = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

$$G = \{0\}.$$

$$H = \{3\}.$$

$$L = \left\{-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right\}.$$

$$P = \Phi.$$

Ținînd seama de definiția modulului se examinează cazurile

a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; b) $x \geqslant 0$, $y < 0$; c) $x < 0$; $y \geqslant 0$; d) $x < 0$, $y < 0$.

Rezolvîndu-se cele patru sisteme se obțin:

$M_1 = \{(7, -5), (-5, 7)\}$,
$M_2 = \{(2, 3), (-2, -3)\}$,
$M_3 = \{(2, 3)\}$,
$M_4 = \{(3, -4)\}$,
$M_5 = \{(3, 10), (-3, -10), (8, -5), (-8, 5)\}$.

I.2.7. 1°. $-5 < x - y < 5$, adică $|x - y| < 5$.

2°. $2 - 4 < x < 2 + 4 \Leftrightarrow -4 < x - 2 < 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 2| < 4$;

3°. $5 - 6 < x < 5 + 6 \Leftrightarrow -6 < x - 5 < 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x - 5| < 6$;

4°. $x + y \geqslant 5$ sau $x + y \leqslant -5$ adică $|x + y| \geqslant 5$.

I.2.8. Ținînd seama de definiția modulului rezultă:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{pentru } x \in (-\infty, -1), \\ 2 & \text{pentru } x \in [-1, 1), \\ 2x & \text{pentru } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Deci pentru $x \in (-\infty, -1)$ reprezentăm grafic
$y_1 = -2x$.
Pentru $x \in [-1, 1)$ pe $y_2 = 2$.
Pentru $x \in [1, +\infty)$ pe $y_3 = 2x$. (Fig. 3)

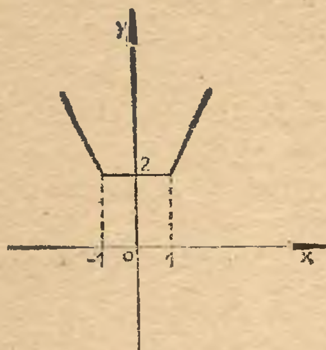


Fig. 3

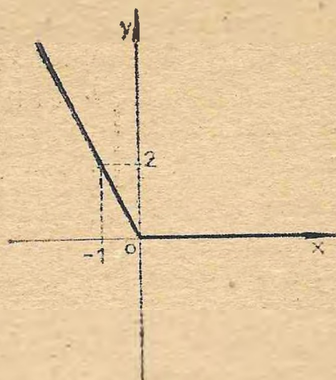


Fig. 4

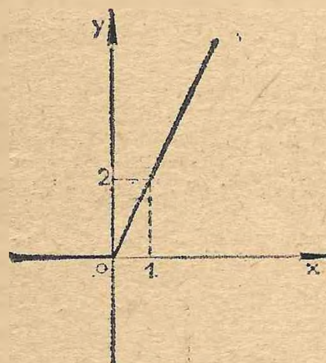


Fig. 5

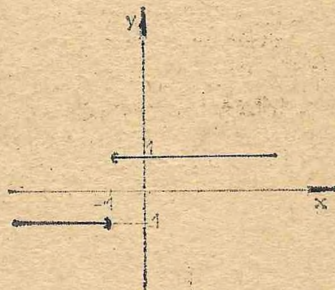


Fig. 6

1.2.9. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in [0, +\infty), \\ -2x & \text{pentru } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$ (Fig. 4.)

1.2.10. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pentru } x \in [0, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$ (Fig. 5.)

1.2.11. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1), \\ 1 & \text{pentru } x \in [-1, +\infty). \end{cases}$ (Fig. 6.)

1.2.12. $|x| \leqslant 1$ este echivalentă cu $-1 \leqslant x \leqslant 1$,
$|x| > 1$ este echivalentă cu $x > 1$ şi $x < -1$.

Deci $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ 1 - x \text{ dacă } x \in [0, 1], \\ 1 + x \text{ dacă } x \in [-1, 0). \end{cases}$ (Fig. 7.)

1.2.13. a) Soluţia algebrică: $|x - 2| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x - 2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in [1, 3]$.

b) Grafic: Reprezentăm pe acelaşi grafic funcţiile

$$y_1 = |x - 2|,$$
$$y_2 = 1.$$

$$y_1 = \begin{cases} x - 2 \text{ pentru } x \in [2, +\infty), \\ 2 - x \text{ pentru } x \in (-\infty, 2). \end{cases}$$

Deci pe $[2, +\infty)$ funcţia $y = x - 2$ iar pe intervalul $(-\infty, 2)$ funcţia $y = 2 - x$.

$y_2 = 1$ este paralelă la axa Ox.

Vom alege porţiunea pentru care $y_1 < y_2$ respectiv $[1, 3]$. (Fig. 8).

1.2.14. a) Soluţia algebrică:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ pentru } x \in [1, +\infty), \\ 1 - x \text{ pentru } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

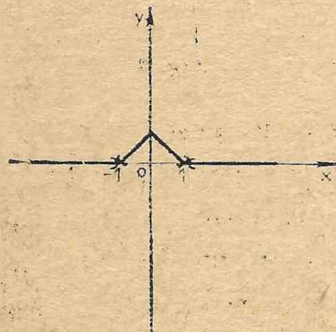


Fig. 7

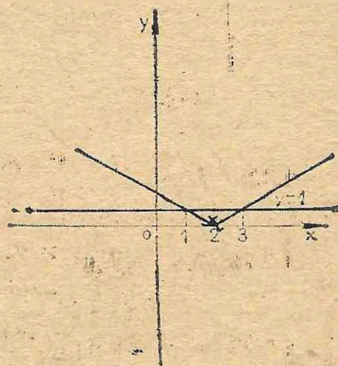


Fig. 8

Deci pentru $x \in [1, +\infty)$ inegalitatea devine $x + x - 1 < 1$; $2x < 2$; $x < 1$ și pentru $x \in (-\infty, 1)$ inegalitatea devine $x + 1 - x < 1$; $1 < 1$; absurd.

Deci $x \in \Phi$.

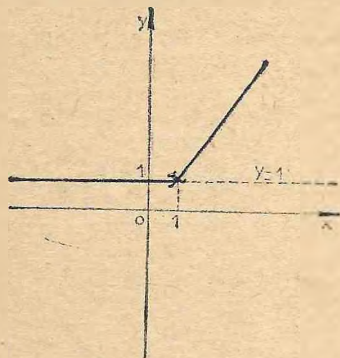


Fig. 9

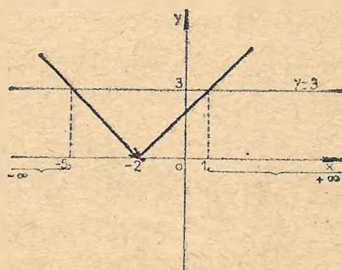


Fig. 10

b) Soluția grafică:

$$y_1 = \begin{cases} 2x - 1 \text{ pentru } x \in [1, +\infty), \\ 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

$y_2 = 1$.

Observăm că pentru $x \in (-\infty, 1]$ $y_1 = y_2 = 1$ deci inegalitatea nu este satisfăcută iar pentru $x \in (1, +\infty)$, $y_2 > y_1$.

Deci $x \in \Phi$. (Fig. 9).

I.2.15. a) Soluția algebrică: $|x + 2| \geqslant 3 \Leftrightarrow x + 2 \geqslant 3$ sau $x + 2 \leqslant -3 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ sau $x \leqslant -5$. Deci $x \in (-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.

b) Soluția grafică: raționament analog cu cel de la exercițiul precedent.

$y_1 = |x + 2|$, $y_2 = 3$.

Se aleg intervalele pentru care $y_2 \geqslant y_1$.

$$y_1 = \begin{cases} x + 2 \text{ pentru } x \in [-2, +\infty), \\ -(x + 2) \text{ pentru } x \in (-\infty, -2). \text{ (Fig. 10)} \end{cases}$$

I.2.16. a) $x \in (-\infty, -1)$.

b) grafic: $y_1 = |x+3| - |x+1|$ deci

$$y_1 = \begin{cases} -2 \text{ pentru } x \in (-\infty, -3), \\ 2x + 4 \text{ pentru } x \in [-3, -1), \\ 2 \text{ pentru } x \in [-1, +\infty). \end{cases}$$

$y_2 = 2$.

$x \in (-\infty, -1)$.

Pentru $x \in [-1, +\infty)$, $y_1 = y_2$.

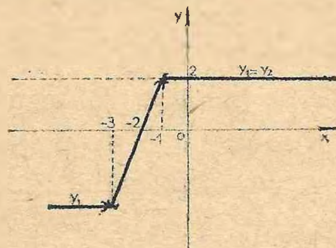


Fig. 11

Deci inegalitatea este satisfăcută pentru $x \in (-\infty, -1)$. (Fig. 11)

I.2.17. 1°. $\frac{29}{2}\sqrt{3}$; 2°. $-13\sqrt{3}$; 3°. 0; 4°. $\frac{11 + 2\sqrt{2}}{8}$;

5°. $\sqrt{1-y}$; 6°. $6\sqrt{2}$;

I.2.18. 1°. $\left(\frac{c+x}{a-b}\right)^m$; 2°. $x^4 - 1$; 3°. $a^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$;

4°. $a^{-\frac{1}{xy}} + a^{\frac{1}{2xy}} \cdot b^{\frac{1}{2x}}$; 5°. $\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}$.

I.2.19. 1° $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$ este tg 79°. $A^2 - B = 49 - 48 = 1$, rezultă $2 + \sqrt{3}$;

2°. Este expresia apotemei pentagonului regulat înscris în cerc $\frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$;

3°. $5+\sqrt{3}$; 4°. $\sqrt{2}-1$;

5°. $A^2-B=(a-ab)^2$, $c=(a-ab)$, rezultă $\sqrt{a}-\sqrt{ab}$;

6°. $a+\sqrt{3-a^2}$; 7°. $\sqrt{x}+\sqrt{x-y}$;

8°. $\sqrt{x\left(x+\frac{y}{2}\right)}-\sqrt{x\left(x-\frac{y}{2}\right)}$.

1.2.20. 1°. Se amplifică cu conjugata numitorului $\Rightarrow \sqrt{ab}$;

2°. $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$; 3°. $\frac{5+\sqrt{15}-\sqrt{10}}{2}$;

4°. $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$;

5°. Numitorul se consideră ca fiind format din doi termeni $(1+\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Se amplifică cu:

$(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{6})$ și rezultă

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{2}.$$

6° Conjugata numitorului fiind $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ rezultă $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$.

7°. Numitorul se mai scrie $\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{y^3}$. Ținînd seama de identitatea: $a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$ rezultă $\frac{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^3y^4}+\ldots+\sqrt[3]{y^5}}{x^2-y^3}$.

8°. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-1}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

9°. Fie N c.m.m.m.c. al indicilor m și n. Amplificăm fracția cu $a^{\frac{N-1}{m}}-a^{\frac{N-2}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{N-3}{m}}\cdot b^{\frac{2}{n}}+\ldots+a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{N-2}{n}}-b^{\frac{N-1}{n}}$,

și numitorul devine $a^{\frac{N}{m}}-b^{\frac{N}{n}}$, $\frac{N}{m}, \frac{N}{n}\in Q$.

10°. Se pleacă de la identitatea $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

Amplificînd cu $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[2]{xz} - \sqrt[3]{yz}$

rezultă $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{xz}}{x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz}}$.

Amplificînd apoi cu $(x + y + z)^2 + 3(x + y + z) \cdot \sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ obținem numitorul rațional $(x + y + z)^3 - 27xyz$.

11°. Folosind considerațiile de la 10° vom obține:

$$\frac{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{10})\,(121+33\sqrt[3]{30}+9\sqrt[3]{900})}{10^3 - 27 \cdot 30}.$$

I.2.21.

1°. $E = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} + \dfrac{(1 + \sqrt{3})\,(2 - \sqrt{3})}{4 - 3}$

iar după efectuarea calculelor $E = \dfrac{3 + 5\sqrt{3}}{6}$.

2°. După aducerea la același numitor se efectuează operațiile indicate iar după simplificare rezultă $E = 4$.

3°. Se observă că $n^3 - 3n - 2 = (n - 2)\,(n + 1)^2$ și $n^3 - 3n + 2 = (n + 2)\,(n - 1)^2$.

Rezultă $E = \dfrac{(n + 1)\sqrt{n - 2}}{(n - 1)\sqrt{n + 2}}$. Evident că expresia are sens pentru $|n| > 2$.

4°. $E = \dfrac{(x + \sqrt{y})^2 + 2(x + \sqrt{y})}{x(x - 1) + \sqrt{y}(x - 1)}$ etc.

Rezultă $E = \dfrac{2 + x + \sqrt{y}}{x - 1}$.

5°. $x \in (-\infty, -4) \cup [4, +\infty)$. Analog cu 3° se obține

$$E = \frac{(x - 2)\sqrt{x + 4}}{(x + 2)\sqrt{x - 4}}.$$

6°. $E = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{ab}$.

7°. $E = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$.

8°. $E = 1$.

1.2.22. Ecuația se mai scrie $(x + 2y - 3z)^2 = 8xy$ sau $x + 2y \pm 2\sqrt{2xy} = 3z$ adică $(\sqrt{x} \pm \sqrt{2y})^2 = 3z$ de unde $\sqrt{x} \pm \sqrt{2y} \pm \sqrt{3z} = 0$.

1.2.23. Se notează $\sqrt[3]{xyz} = u$ și efectuînd calculele rezultă $E = -1$.

1.2.24. Dacă notăm

$$1 + \sqrt{1 - x^m} = u; \; 1 - \sqrt{1 - x^m} = v; \; 1 + \sqrt{1 - x^n} = w;$$
$$1 - \sqrt{1 - x^n} = t$$

avem $(uv)^n - (wt)^m = [(1 + \sqrt{1 - x^m})(1 - \sqrt{1 - x^m})]^n - [(1 + \sqrt{1 - x^n})(1 - \sqrt{1 - x^n})]^m = x^{mn} - x^{nm} = 0$.

Atunci:

$$E_1 + E_2 = \frac{u^n + w^m}{v^n + t^m} + \frac{u^n - w^m}{v^n - t^m} = \frac{2[(uv)^n - (wt)^m]}{v^{2n} - t^{2m}} = 0.$$

1.2.25. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$; $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$, $\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{8 + 2(\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$ etc. Rezultă că numărul este 6.

1.2.26. $$E = \frac{(\sqrt[p]{x} - 1) + (\sqrt[2p]{x} - 1) + \ldots + (\sqrt[kp]{x} - 1)}{(\sqrt[n]{x} - 1) + (\sqrt[2n]{x} - 1) + \ldots + (\sqrt[kn]{x} - 1)}.$$

Ținînd seama de egalitatea

$$\sqrt[p]{x} - 1 = \frac{x - 1}{\sqrt[p]{x^{p-1}} + \sqrt[p]{x^{p-2}} + \ldots + 1}$$ rezultă $E = \dfrac{n}{p}$.

1.2.27. 0.

I.2.28. Se calculează $1 + x$ și $1 - x$ se ține seama că
$$\sqrt{(a+2)^2} = |a+2| = \begin{cases} a+2 \text{ pentru } a \in [-2, +\infty), \\ -2-a \text{ pentru } a \in (-\infty, -2). \end{cases}$$
$$\sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = \begin{cases} a-2 \text{ pentru } a \in [2, +\infty), \\ 2-a \text{ pentru } a \in (-\infty, 2). \end{cases}$$
$E = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}(|a+2| - |a-2|)$. Deci pentru

$a \in (-\infty, -2)$, $E = -\dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$;

pentru $a \in [-2, 2)$; $E = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4}}$;

pentru $a \in [2, +\infty)$, $E = \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$.

I.2.29. $1 + x^2 = 1 + \dfrac{b(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)} = \dfrac{(a+b)^3}{a(a^2+3b^2)}$;

$1 - x^2 = 1 - \dfrac{b(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)} = \dfrac{(a-b)^3}{a(a^2+3b^2)}$.

Introducînd în E obținem: $E(a,b) = \dfrac{a}{b}$.

I.2.30. Se raționalizează numitorii lui a și b, se observă că $ab = 1$ și introducînd în expresie rezultă $E = 17$.

I.2.31. Se scrie x sub forma $x = \dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}$, și se înlocuiește în expresia E obținîndu-se succesiv:
$$\frac{2b\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{4ab} - 1}}{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{4ab} - 1}} = \frac{2b\,|a-b|}{a+b-|a-b|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E(a,b) = \begin{cases} a-b \text{ pentru } a \geqslant b, \\ \dfrac{b}{a}(b-a) \text{ pentru } b > a. \end{cases}$$

1.2.32. $\sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+2}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+2}}$; $\sqrt{y+1} =$

$$= \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+2}} = \frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}}.$$

Deci $E(a) = \dfrac{\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a^2+2}} + \dfrac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}}}{\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a^2+2}} - \dfrac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}}} = \dfrac{|a-1|+|a-2|}{|a-1|-|a-2|}.$

$$|a-1| = \begin{cases} a-1 \text{ pentru } a \in [1, +\infty), \\ 1-a \text{ pentru } a \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

$$|a-2| = \begin{cases} a-2 \text{ pentru } a \in [2, +\infty), \\ 2-a \text{ pentru } a \in (-\infty, 2). \end{cases}$$

$$E(a) = \begin{cases} 2a-3 \text{ pentru } a \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty), \\ \dfrac{1}{2a-3} \text{ pentru } a \in [1, 2). \end{cases}$$

I.3. FUNCȚII. FUNCȚIA DE GRADUL ÎNTÎI. FUNCȚIA DE GRADUL DOI. INECUAȚII. SISTEME DE INECUAȚII. INECUAȚII IRAȚIONALE

Exerciții de învățămînt programat

I.3.1. Să se arate care din exprimările de mai jos sînt greșite, să se explice de ce și să se corecteze.

a) Fie funcția $f : R \to R$ de forma $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) Fie funcția $f : R \to R_+$ de forma $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

c) Fie funcția $f : R \to [-1, 1]$ de forma $f(x) = \sin x$

d) Fie funcția $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 4, 5, 6\}$ de forma

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ pentru } x \in \{0, 3\} \\ 7-x \text{ pentru } x \in \{1, 2\} \end{cases}$$

e) Fie funcția $f:(-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$ de forma $f(x) = -x^2$

f) Fie funcția $f : R \to [1, +\infty)$ de forma $f(x) = x^2 + 1$

g) Fie funcția $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{-1, 0, 4\}$ de forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ pentru } x \in \{0, 1\} \\ 2x \text{ pentru } x \in \{2\} \\ -1 \text{ pentru } x \in \{4, 3\} \end{cases}$$

h) Fie funcția $f : R \to R$ de forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \text{ pentru } x \in (-\infty, 1) \\ 0 \text{ pentru } x = 1 \\ \dfrac{1}{x-2} \text{ pentru } x \in (1, 2) \\ 2x \text{ pentru } x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate și care sînt false? Justificați răspunsul de fiecare dată.

1.3.2. Fie mulțimile $E = \{0, 1, 2, 3\}$ și $F = \{0, 2\}$. Considerăm funcția $f : E \to F$ dată de legea $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) f este surjectivă, fiindcă $f(E) = F$

b) f nu este surjectivă fiindcă $F(E) \subset F$

c) f este injectivă

d) f nu este injectivă fiindcă $f(0) = f(3)$

e) f este bijectivă fiindcă este surjectivă și injectivă

f) f nu este bijectivă fiindcă este surjectivă dar nu este injectivă.

g) f nu este bijectivă fiindcă nu este nici surjectivă nici injectivă.

1.3.3. Fie funcția $f : R \to R$ dată de legea $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in R$ și $a \neq 0$. Mulțimea valorilor funcției este:

1) $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ pentru $a > 0$

2) $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ pentru $a < 0$

3) $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ pentru $a < 0$

4) $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ pentru $a > 0$

5) $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ pentru $a < 0$

6) $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ pentru $a > 0$.

1.3.4. Semnul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in R$ este:

1) Semnul lui a pentru $\Delta \leqslant 0$ (unde $\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul)

2) Semnul contrar semnului lui a pentru $\Delta \leqslant 0$

3) Pozitiv dacă $a > 0$ și $\Delta \leqslant 0$.

4) Negativ dacă $a < 0$ și $\Delta \leqslant 0$.

5) Semn contrar semnului lui a pentru $x \in (x_1, x_2)$ unde $x_1, x_2 \in R$ sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ în cazul în care $\Delta > 0$, $(x_1 < x_2)$

6) Semnul lui a pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ în cazul în care $\Delta > 0$, x_1, x_2 avînd semnificația de mai sus.

7) Semnul lui a cînd $x \in (x_1, x_2)$ și semn contrar semnului lui a pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ în cazul cînd $\Delta > 0$.

I.3.5. Care din afirmațiile de mai jos sînt adevărate și care sînt false?

a) Inecuația $ax + b \geqslant 0$ este satisfăcută pentru $x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ dacă $a > 0$ și pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ dacă $a < 0$.

b) Inecuația $ax + b > 0$ este satisfăcută pentru $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ dacă $a > 0$ și pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ dacă $a < 0$

c) Inecuația $ax + b < 0$ este satisfăcută pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ dacă $a > 0$ și pentru $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ dacă $a < 0$.

d) Inecuația $ax + b \leqslant 0$ este satisfăcută pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ dacă $x \in R - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

e) Inecuația $ax + b \leqslant 0$ este satisfăcută pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ dacă $a > 0$, și pentru $x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ dacă $a < 0$.

I.3.6. Pentru a rezolva un sistem de inecuații (inecuații simultane) procedăm astfel:

a) Rezolvăm fiecare inecuație și apoi considerăm reuniunea mulțimilor de soluții găsite.

b) Rezolvăm fiecare inecuație și apoi considerăm intersecția mulțimilor de soluții găsite.

1.3.7. Pentru ca graficul lui $y = ax^2 + bx + c$ să nu intersecteze *axa Ox* trebuie ca:

a) $\Delta > 0$.
b) $\Delta < 0$
c) $\Delta \leqslant 0$
d) $\Delta = 0$.

1.3.8. Pentru ca $y = ax^2 + bx + c$ să admită ca punct de extrem un maxim trebuie ca:

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

c) $a < 0$

d) $a > 0$

e) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ a > 0. \end{cases}$

1.3.9. Pentru determinarea lui $m \in R$ în așa fel încît $y(x) = (3m - 1)\, x^2 - mx + 17m - 50$ să aibă abscisa punctului de extrem egală cu 1 punem condiția:

a) $x_1 = x_2 = 1$, x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației $y = 0$.
b) $y(1) = 0$
c) $\dfrac{m}{2(3m - 1)} = 1$
d) $3m - 1 = 1$
e) $\Delta = 0$.

1.3.10. Pentru determinarea lui $\alpha, \beta \in R$ astfel ca graficul lui $y(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ să aibă un punct de minim în $A(3, -1)$ punem condițiile:

a) $\begin{cases} y(3) = -1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y(3) = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ y(3) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{-\alpha}{2} = 3 \\ y(3) = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{-\alpha}{2} = 1 \\ y(-1) = 3. \end{cases}$

I.3.11. Condiția ca graficul lui $y = x^2 - 2mx + m^2 + m$ să fie tangent axei Ox este:

a) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m^2 + m = 0 \end{cases}$

b) $\Delta = 0$

c) $\Delta > 0$

d) $\Delta \leqslant 0$

e) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ -2m > 0. \end{cases}$

I.3.12. Vrem să cercetăm dacă graficul lui $y = (m + 1)x^2 - (5m + 1)x + 4m - 20$, $m \in R$ trece printr-un punct fix, oricare ar fi valoarea lui m. Pentru aceasta vom proceda astfel:

a) Vom ordona expresia în raport cu m, vom anula coeficientul lui m determinînd abscisele punctelor respective după care calculăm și ordonatele;

b) Vom rezolva ecuația $y = 0$ și vom pune condiția ca rădăcinile să nu depindă de m;

c) Vom pune condiția $m = 0$.

I.3.13. Pentru a determina valorile lui $m \in R$ pentru care $y = (m + 1)x^2 - 3mx + 1$ să fie un pătrat perfect punem condiția:

a) $\Delta > 0$

b) $\Delta = 0$

c) $3m > m + 1$.

I.3.14. Pentru a determina valorile lui $m \in R$ astfel încît $(m+1)x^2 - 3mx + 4m - 5 > 0$, oricare ar fi x, vom pune condițiile:

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m + 1 < 0. \end{cases}$

I.3.15. Pentru a determina valorile lui $m \in R$ astfel încît $(m-2)x^2 - (m+1)x + 5m - 1 < 0$, oricare ar fi x, vom pune condițiile:

a) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m - 2 > 0. \end{cases}$

I.3.16. Pentru a determina valorile lui m pentru care graficul lui $y = (m+3)x^2 - (m-10)x + 16$ să aibă punctul de extrem situat pe axa Oy punem condițiile;

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m + 3 < 0 \end{cases}$

b) $\dfrac{m - 10}{2(m + 3)} = 0$

c) $\Delta < 0$

d) $\dfrac{16}{m + 3} = m - 10.$

Exerciții și probleme propuse

I.3.17. Fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Să se arate că oricare ar fi numerele reale y, z este adevărată relația:

$$\frac{f(y) + f(z)}{2} = f\left(\frac{y + z}{2}\right)$$

I.3.18. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f : R \to R$, $f(x) = -x + 2$

b) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pentru } x < -1 \\ 0 & \text{pentru } x = -1 \\ x & \text{pentru } x \in (-1, 2] \\ 2 & \text{pentru } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

c) $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 7\}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dacă } x \in \{1\} \\ 3x - 2 & \text{dacă } x \in \{2\} \\ 2x + 1 & \text{dacă } x \in \{3\} \end{cases}$

d) $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{-1, 0, 5, 6\}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dacă } x \in \{0, 1\} \\ x + 3 & \text{dacă } x \in \{2, 3\} \\ -x + 4 & \text{dacă } x \in \{4\} \end{cases}$$

e) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} -x \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \\ x \text{ pentru } x \ (0, 1) \\ 1 \text{ pentru } x \in [1, 3) \\ 3x - 6 \text{ pentru } x \in [3, +\infty) \end{cases}$

f) $f : [0, 3] \to [-5, 1]$, $\quad f(x) = 2x - 5$

I.3.19. Se consideră funcțiile $f : [a, b] \to R$ și $g : [0, 1] \to R$ de forma $f(x) = mx + 1$ și $g(x) = x + n$. Să se determine a, b, m, n astfel ca funcțiile să fie egale.

I.3.20. Se consideră funcțiile f, g, h definite pe R cu valori în R de forma:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dacă } x \in (-2, +\infty) \\ 0 & \text{dacă } x = -2 \\ -(x + 2) & \text{dacă } x (-\infty, -2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dacă } x \in [-2, +\infty) \\ -(x + 2) & \text{dacă } x \in (-\infty, -2) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dacă } x \in (-2, +\infty) \\ -(x + 2) & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \end{cases}$$

Să se arate că $f = g = h$

I.3.21. Se consideră funcțiile:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dacă } x \leqslant \frac{3}{2} \\ 1 - x \text{ dacă } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$g(x) = \max(x - 2, 1 - x)$, $x \in R$. ($\max(a, b)$ este cel mai mare dintre numerele a, b dacă $a \neq b$, $\max(a, a) = a$). Să se arate că funcțiile f și g sînt egale.

I.3.22. Utilizîndu-se graficele următoarelor funcții să se precizeze dacă sînt sau nu injective.

a) $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ pentru } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \\ 4x - 6 \text{ pentru } x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 \text{ pentru } x \in [-2, +\infty) \\ 2x + 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, -2) \end{cases}$$

c) $$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x < 0 \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \\ 1 \text{ pentru } x > 0 \end{cases}$$

(Această funcție se numește signum de x sau signatură)

d) $f(x) = E(x) = \begin{cases} n \text{ dacă } n \leqslant x < n+1 \\ -n \text{ dacă } -n \leqslant x < -n+1 \end{cases}$
$n = 0, 1, 2, \ldots$

Funcția $E(x)$ se mai notează și prin $[x]$ și este partea întreagă a numărului x.

1.3.23. Fie funcția $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Să se arate că este bijectivă.
b) Să se determine inversa acestei funcții.

1.3.24. Fie funcția $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$ numită funcția lui Dirichlet. a) Este această funcție o bijecție?
b) Să se arate că orice număr rațional nenul este o perioadă a funcției.

1.3.25. Folosind graficele următoarelor funcții să se precizeze care sînt bijective și care nu sînt bijective.

a) $f : \{1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = -x$
b) $f : [0, 4] \to [0, 2]$, $f(x) = \min(x, 4-x)$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$
d) $f : (0, 1] \cup [2, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

1.3.26. Fiind date funcțiile $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ 1-x & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ și $g(x) = x^2$,

să se formeze: a) f ∘ g, b) g ∘ f, c) f ∘ f, d) g ∘ g.

1.3.27. *Să se studieze semnul următoarelor funcții de gradul II:*

1°. $f(x) = x^2 - 7x + 6$; 2°. $f(x) = x^2 + x$;
3°. $f(x) = -x^2 + 1$; 4°. $f(x) = -x^2 - 1$;
5°. $f(x) = x^2 + 25$; 6°. $f(x) = -5x^2 - 3x$;
7°. $f(x) = x^2 + x + 1$; 8°. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Să se stabilească maximul, respectiv minimul, intervalele de monotonie și să se reprezinte grafic următoarele funcții de gradul doi:

I.3.28. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

I.3.29. $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

I.3.30. $f(x) = - x^2 - 4$

I.3.31. $f(x) = - x^2 + 4$.

I.3.32. $f(x) = - x^2 - x - 1$.

I.3.33. $f(x) = - x^2 - 5x$.

Să se expliciteze următoarele funcții:

I.3.34. $f(x) = | x^2 - 5x + 4 |$;

I.3.35. $f(x) = | - x^2 + 1 |$;

I.3.36. $f(x = | x^2 - 1 | + | x |$;

I.3.37. $f(x) = | x^2 - 3 | + | 4 - x^2 |$;

I.3.38. $f(x) = | x^2 - 3x + 2 | + | x^2 - 9 |$;

I.3.39. $f(x) = | x^2 - 7x + 12 | - | x^2 - 6x + 5 |$;

I.3.40. $f(x) = | - x^2 + 3x - 2 | + | 16 - x^2 |$.

I.3.41. Să se determine a, b, c știind că funcția $f : R \to R$ de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, se anulează pentru $x = 8$ și are un maxim egal cu $- 12$ pentru $x = 6$.

I.3.42. Pe o dreaptă (Δ) considerăm un segment $AB = a$. Se construiesc două triunghiuri echilaterale avînd ca baze pe AM și MB unde $M \in (\Delta)$.

1°. Determinați poziția punctului M astfel ca suma ariilor acestor două triunghiuri să fie minimă.

2°. Care este valoarea minimă a acestei sume?

3°. Reprezentați grafic variația acestei sume atunci cînd M descrie segmentul AB.

I.3.43. Fie AD mediana unui triunghi oarecare ABC. Să se determine un punct $M \in AD$ astfel ca expresia $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

I.3.44.* Care este aria maximă a unui dreptunghi înscris într-un triunghi ABC în care $AB = b$ și înălțimea corespunzătoare este h.

I.3.45. Să se arate că $y = \dfrac{x^2 + ax}{x^2 - 2x - 3}$ admite un maxim și un minim, cînd x variază de la $-\infty$ la $+\infty$, pentru $a \in (-3, 1)$.

Să se determine maximumul și minimumul expresiilor de mai jos, specificîndu-se de fiecare dată și valorile lui x corespunzătoare.

I.3.46. $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4}$.

I.3.47. $y = \dfrac{2x^2 - 24x + 48}{x^2 - 10x + 25}$.

I.3.48. $y = \dfrac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x}$.

I.3.49. $y = \dfrac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x + 5}$.

I.3.50. $y = \dfrac{3x}{x^2 + x + 1}$.

I.3.51. Să se determine $a \in R$ astfel ca valoarea lui x pentru care expresia $y = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + a}$ este maximă să fie dublul aceleia pentru care este minimă.

I.3.52.* Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu același perimetru să se găsească acela care are raza cercului înscris maximă.

I.3.53. Fie funcția $f : R \to R$ de forma $f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2$. Pentru ce valoare a lui x are valoarea minimă?

Să se indice această valoare ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ se consideră cunoscuți).

I.3.54. Să se determine valorile lui $m \in R$ astfel ca relațiile de mai jos să fie satisfăcute pentru orice $x \in R$:

1°. $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 1 > 0$;
2°. $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 > 0$;
3°. $mx^2 + 2(m+1)x + 4m > 0$;
4°. $mx^2 + 2(m+1)x + 4m < 0$;
5°. $(m+6)x^2 - 4mx + m + 1 < 0$.

I.3.55. Fie parabolele $y = mx^2 + 2(m+1)x + m - 1$; $m \in R$.

1°. Să se determine m astfel încît parabola să fie tangentă axei Ox.

2°. Pentru ce valoare a lui m vîrful parabolei este pe Oy?

3°. Există vreun punct prin care să treacă toate curbele, cînd m variază?

4°. Să se determine m astfel încît curbele reprezentative să nu taie axa Ox.

5°. Să se determine m astfel încît graficele să fie deasupra axei Ox.

6°. Să se determine m astfel încît graficele să fie sub axa Ox.

I.3.56. Fie parabolele $y = (m+1)x^2 - 2x + 1$; $m \in R$.

1°. Să se determine m astfel încît vîrfurile să fie numai puncte de maxim.

2°. Cînd m parcurge mulțimea numerelor reale, vîrfurile parabolelor descriu o dreaptă. Să se afle ecuația acestei drepte și să se reprezinte grafic.

Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

I.3.57. $f(x) = |x^2 - 1| + x^2$;

I.3.58. $f(x) = |x^2 - 16| + |x^2 - 1|$;

I.3.59. $f(x) = |4 - x^2| + |x^2 - 9|$;

I.3.60. $f(x) = |x^2 - 3|$.

I.3.61. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = |x^2 - 5x + 4| - |9 - x^2|$.

Să se rezolve următoarele inecuații:

1.3.62. $(9 - x^2)(x^3 - 7x^2 + 10x) \leqslant 0.$

1.3.63. $\dfrac{(5 - x)(-x^2 - 9)(x^2 + 1)}{(x^2 - 9)(-x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 7)} \leqslant 0.$

1.3.64. $\dfrac{(25 - x^2)(1 - x^2)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 15x + 44)(3 - x)(-x^2 - 1)} \geqslant 0.$

1.3.65. $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x - 5}{x + 1} < 1.$

1.3.66. $1 - \dfrac{x - 2}{x - 1} > \dfrac{4 - x}{x - 3}.$

1.3.67. $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{3x}{x - 1} < \dfrac{3}{2}.$

1.3.68. $(x^2 - 5x + 4)^2 - (x^2 - 7x + 6)^2 \geqslant 0.$

1.3.69. $\dfrac{\dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{x - 2}{3}}{\dfrac{x - 3}{4} + \dfrac{x - 5}{6}} > 7.$

1.3.70. $x + \dfrac{4}{x} < \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 1}.$

1.3.71. $\dfrac{x - 1}{x + 1} + \dfrac{1}{x^2 - 1} - 1 < \dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{3x}{x - 1}.$

1.3.72. $\dfrac{25}{2x + 1} - \dfrac{72x^2 - 49x - 13}{x^2 - 1} > -27x.$

1.3.73. $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0.$

1.3.74. $x^4 - 9x^2 + 8 < 0.$

1.3.75. $\dfrac{-x^4 + 34x^2 - 225}{x^4 - 5x^2 + 4} < 0.$

Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care sînt satisfăcute simultan relațiile:

I.3.76. $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + 4x > 0. \end{cases}$

I.3.77. $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0. \end{cases}$

I.3.78. $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 + x - 5 > 0. \end{cases}$

I.3.79. $\begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ - x^2 + 7x - 6 > 0. \end{cases}$

I.3.80. $\begin{cases} x^2 + 10x - 16 > 0 \\ 1 - x^2 > 0. \end{cases}$

I.3.81. $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \\ 5 - x^2 > 0. \end{cases}$

I.3.82. $\begin{cases} \dfrac{x - 5}{x - 3} > 0 \\ \dfrac{12x - 11}{x^2 + 1} > 0 \\ \dfrac{x - 3}{x + 2} < 0. \end{cases}$

I.3.83. $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 > 0 \\ \dfrac{x - 3}{x + 3} < 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 9 - x^2 > 0 \\ \dfrac{x - 2}{x^2 + x + 1} < 0. \end{cases}$

I.3.84. $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geqslant 0 \\ \dfrac{x-5}{x+1} < 0 \\ 4x - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

I.3.85. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} > 1 \\ (x-1)(x^2-4) > 0 \\ \dfrac{x(3x-2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} \geqslant 0. \end{cases}$

I.3.86. $\begin{cases} (x^2 + 5x)(4 - x) > 0 \\ \dfrac{x^4 - 17x^2 + 60}{x^3 - 8x^2 + 15x} > 0 \\ 1 > \dfrac{4 - x}{x^2 + x + 1}. \end{cases}$

Să se determine valorile lui x pentru care sînt satisfăcute relațiile:

I.3.87. $\dfrac{2 - |x-2|}{|x-2| + 2} \geqslant 0.$

I.3.88. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 3.$

I.3.89. $x + |x - 1| < 1.$

I.3.90. $|12 - x| + |x + 3| - 15 > 0.$

I.3.91. $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x(x-3)}\right| < \dfrac{1}{2}.$

I.3.92. $\left|\dfrac{5x-3}{4x+7}\right| \leqslant 3.$

I.3.93. Pentru ce valori ale lui $m \in R$ relația:

$$\left|\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$$

este verificată pentru orice $x \in R$.

Să se găsească regiunea din planul xOy pentru care sînt verificate relațiile:

I.3.94. $3x - 2y + 6 < 0$.

I.3.95. $2x + 3y - 4 > 0$.

I.3.96. $-2x + y < 1$.

I.3.97. $-x - 2y > 4$.

I.3.98. $|x| + |y| < 1$.

Să se găsească regiunea din planul axelor xOy pentru care sînt verificate simultan relațiile:

I.3.99. $\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x + 3y > 6. \end{cases}$

I.3.100. $\begin{cases} -x + y < 3 \\ -2x - y > 4. \end{cases}$

I.3.101. $\begin{cases} x - 2y + 1 < 0 \\ 2x - y < 1 \\ x - y > -1. \end{cases}$

Să se rezolve algebric și grafic inecuația:

I.3.102. $|2x - 3| + |1 - x| - 2|x| < 1 + x$.

Să se rezolve inecuațiile:

I.3.103. $\sqrt{x - 2} > x - 4$.

I.3.104. $\sqrt{3x + 2} \geqslant 2 + \sqrt{x - 6}$.

I.3.105. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{2 - x} > 1$.

I.3.106.* $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$.

I.3.107. $4x + 3\sqrt{-x^2 - x + 6} > -2$.

I.3.108. $\frac{4-x}{2x} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$.

I.3.109. Să se afle mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care există pe rînd inegalitățile:

a) $x - \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$;

b) $x + \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$.

(Concurs, 1973.)

I.3. SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

I.3.1. a) Exprimarea nu este corectă fiindcă funcția nu este definită pentru $x = 1$. Trebuie scris $f : R - \{1\} \to R$.

e) Exprimarea nu este corectă fiindcă mulțimea valorilor nu este $[0, +\infty)$. Mulțimea valorilor funcției este $(-\infty, 0]$.

I.3.2. a) Exprimarea este corectă fiindcă $f(0) = 2$, $f(1) = f(2) = 0$, $f(3) = 2$, deci $f(E) = \{0, 2\} = F$; d) Exprimarea este corectă fiindcă la două argumente distincte corespund imagini egale; f) Exprimarea este corectă.

I.3.3. Corect: 1 și 5. **I.3.4.** Corect: 1, 3, 4, 5, 6. **I.3.5.** Corect: a, b, c, e. **I.3.6.** Corect: b.

I.3.7. b).
I.3.8. c).
I.3.9. c).
I.3.10. d).
I.3.11. b).
I.3.12. a).
I.3.13. b).
I.3.14. b).
I.3.15. a).
I.3.16. b).

I.3.17. Cum funcția este dată de legea $f(x) = ax + b$ rezultă că: $f(y) = ay + b$, $f(z) = az + b$ deci

$$\frac{f(y) + f(z)}{2} = \frac{ay + az + 2b}{2} \text{ și } f\left(\frac{y+z}{2}\right) = a\left(\frac{y+z}{2}\right) + b =$$

$$= \frac{ay + az + 2b}{2}$$ adică relația cerută.

I.3.18. b. Pentru $x \in (-\infty, -1)$ se reprezintă grafic dreapta $y = x + 1$, pentru $x = -1$, $y = 0$ pentru $x \in$ $\in (-1, 2]$ se reprezintă grafic dreapta $y = x$, iar pentru $x \in (2, +\infty)$ se reprezintă grafic dreapta $y = 2$.

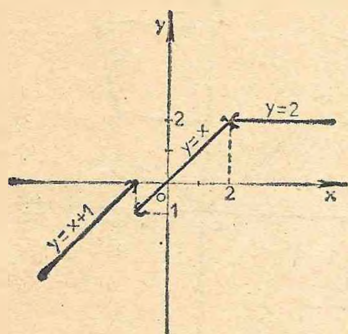


Fig. 12

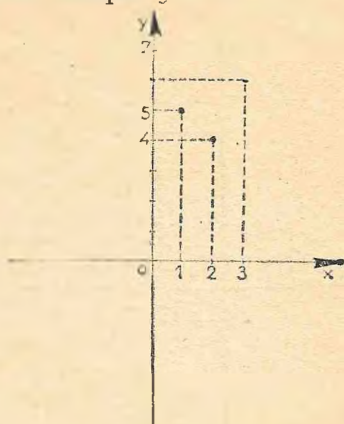


Fig. 13

(Vezi figura 12)
c) Vezi fig. 13.
d) Vezi fig. 14.
e) Vezi fig. 15.
f) Vezi fig. 16.

I.3.19. Ținînd seama de definiția funcțiilor egale $\Rightarrow a =$ $= 0$, $b = 1$; $f(0) = g(0) \Rightarrow n = 1$, $f(1) = g(1) \Rightarrow m + 1 =$ $= n + 1 \Rightarrow m = 1$.

I.3.20. Domeniile de definiție ale celor trei funcții coincid, mulțimile valorilor coincid. $f(-2) = g(-2) =$ $= h(-2) = 0$.

I.3.21. $x - 2 \leqslant 1 - x \Leftrightarrow 2x \leqslant 3$, $x \leqslant \frac{3}{2}$ deci $\max(x -$ $- 2, 1 - x) = x - 2$ pentru $x \leqslant \frac{3}{2}$.

$1 - x > x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ deci $\max(x - 2, 1 - x) = 1 - x$ pentru $x > \frac{3}{2}$.

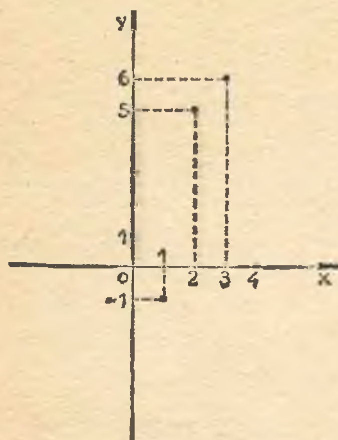


Fig. 14

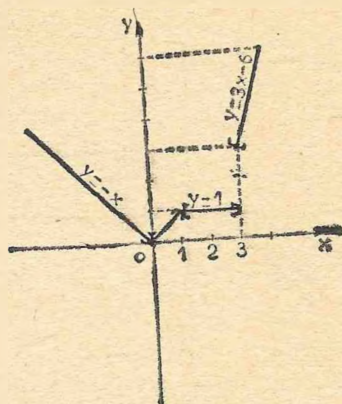


Fig. 15

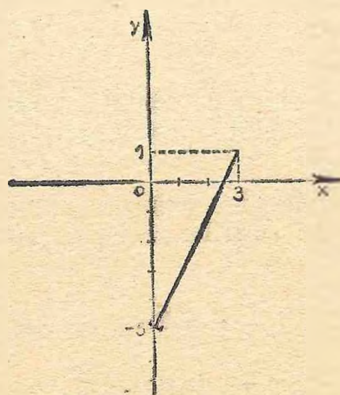


Fig. 16

$$\text{Deci } \max(x-2,\ 1-x) = \begin{cases} x-2 \text{ pentru } x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ 1-x \text{ pentru } x > \dfrac{3}{2}, \end{cases} \text{ adică } f.$$

I.3.22. Dacă orice paralelă la axa Ox intersectează graficul funcției în cel mult un punct (adică îl intersectează într-un singur punct, sau nu-l intersectează) atunci funcția este

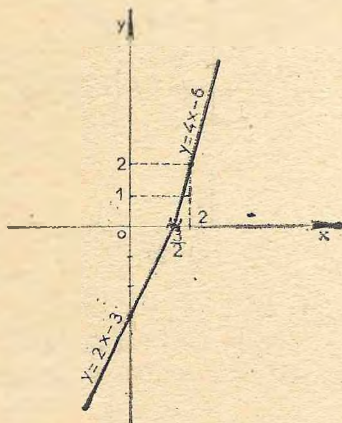


Fig. 17

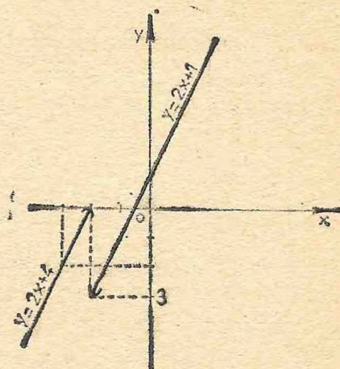


Fig. 18

injectivă. Dacă există o paralelă la axa Ox care intersectează graficul funcției în două sau mai multe puncte atunci funcția nu este injectivă.

a) funcția este injectivă (fig. 17); b) funcția nu este injectivă (fig. 18); c) funcția nu este injectivă (fig. 19); d) funcția nu este injectivă (fig. 20).

I.3.23. Să arătăm că este bijectivă pe $R - \{-1\}$. Funcția $f(x)$ poate să fie scrisă sub forma $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x}$.

Fie $x_1 < x_2 < -1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{2x_1}{1+x_1} - 1 + \frac{2x_2}{1+x_2} = 2\frac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} > 0$. Deoarece $1 + x_1 < 0$, $1 + x_2 < 0$, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$ adică $f(x_1) > f(x_2)$.

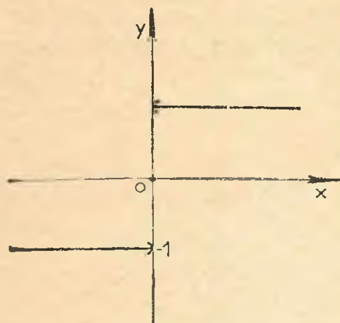


Fig. 19

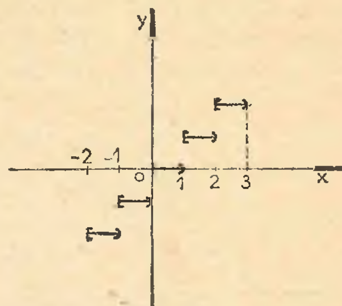


Fig. 20

Funcția este descrescătoare pentru $x < -1$. Pentru $x > -1$ și $-1 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, deci tot descrescătoare adică este surjecție. Să arătăm că pentru $x_1 \neq x_2$ avem

$$f(x_1) \neq f(x_2);\quad f(x_1) - f(x_2) = 2\frac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} \neq 0$$

pentru $x_1 \neq x_2$. Deci funcția este o bijecție.

Fiind bijectivă admite inversă, care se obține rezolvînd în raport cu x ecuația $y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$. Folosind notația obișnuită se scrie $f^{-1}_{(x)} = \frac{1-x}{1+x}$ adică, în cazul acesta, funcția inversă coincide cu funcția dată.

I.3.24. a) Funcția este surjectivă, dar nu este injectivă, deci nu este bijecție.

b) Fie t un număr rațional nenul. Dacă x este și el rațional atunci $x+t$ este tot rațional,iar dacă x este irațional atunci $x+t$ este irațional. Deci

$$f(x+t)=\begin{cases}1 \text{ dacă } x \text{ este rațional}\\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional.}\end{cases} \quad \text{Deci } f(x+t)=f(x),$$

adică f este periodică, de perioadă t, pentru orice număr t rațional nenul.

I.3.25. Pentru a arăta că funcțiile sînt sau nu injective procedăm ca la exercițiul I.3.22. Pentru a studia dacă



Fig. 21

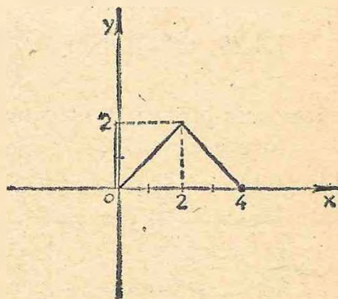


Fig. 22

funcțiile sînt sau nu surjective se procedează astfel: Fie $f: E \to F$. Mulțimea F este mulțimea valorilor funcției și deci mulțimea acestor puncte este situată pe Oy. Dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele lui F intersectează graficul funcției cel puțin odată atunci funcția este surjectivă. Mulțimea F este porțiunea dublată pe axa Oy la fiecare grafic. Deci dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele lui F, întîlnește graficul într-un singur punct, funcția este bijectivă.

a) funcția este injectivă (fig. 21); b) funcția este surjectivă dar nu este injectivă, deci nu este bijectivă (fig. 22); c) funcția este surjectivă dar nu este injectivă (fig. 23); d) funcția este bijectivă (fig. 24).

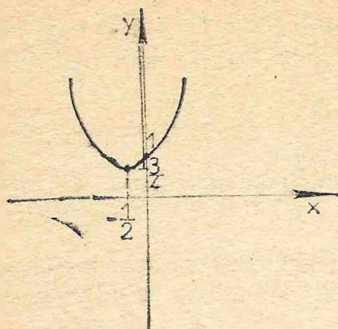


Fig. 23

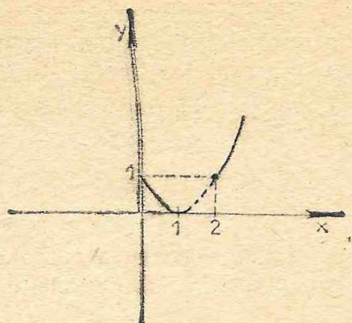


Fig. 24

I.3.26. a) $f(g(x)) = \begin{cases} g(x) & \text{dacă } g(x) \geqslant 0 \\ 1 - g(x) & \text{dacă } g(x) < 0. \end{cases}$

Dar cum $g(x) \geqslant 0$, oricare ar fi x, rezultă $f(g(x)) = g(x) = x^2$.

b) $g(f(x)) = [f(x)]^2$ pentru $x \in [0, +\infty)$ $f(x) = x \Rightarrow$ $\Rightarrow [f(x)]^2 = x^2$ deci $g(f(x)) = x^2$.

Dacă $x < 0, f(x) = 1 - x, g(f(x)) = (1 - x)^2$. Deci $g(f(x)) =$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ (1 - x)^2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

c) $f(f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ 1 - f(x) & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$

Dar $f(x) \geqslant 0$ pentru orice x și deci $f(f(x)) = f(x) =$

$$= \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ 1 - x & \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

d) $g(g(x)) = [g(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4$.

I.3.27. 1°.

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 7x + 6$		+	0	−	0	+	

2°.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x) = x^2 + x$		+	0	−	0	+	

3°.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4°.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = -x^2 - 1$		$-$	

5°.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = x^2 + 25$		$+$	

6°.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		0		$+\infty$
$f(x) = -5x^2 - 3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

7°.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = x^2 + x + 1$		$+$	

8°.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + 2x - 3$		$-$	

I.3.28.

x	$-\infty$		0		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(Vezi fig. 25)

I.3.29.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

(Vezi fig. 26)

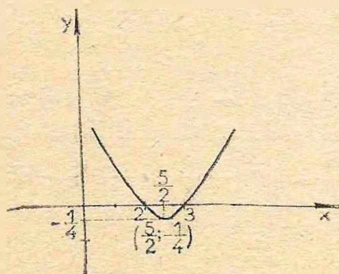


Fig. 25

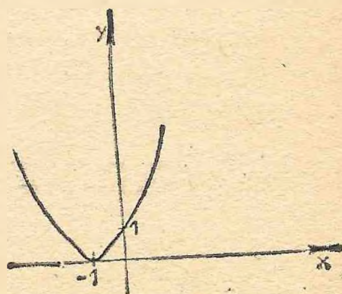


Fig. 26

I.3.30.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = -x^2 - 4$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$
			max		

(Vezi fig. 27)

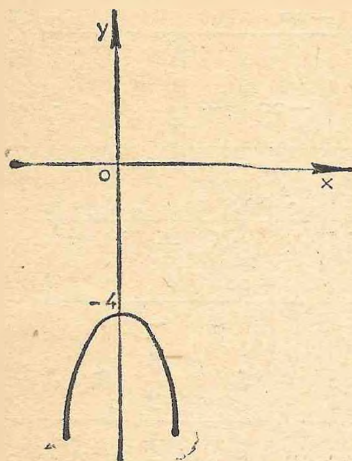


Fig. 27

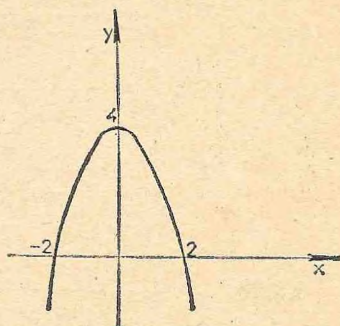


Fig. 28

I.3.31.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + 4$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
					max				

(Vezi fig. 28)

I.3.32.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x) = -x^2 - x - 1$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$
			max				

(Vezi fig. 29)

I.3.33.

x	$-\infty$		-5		$-\frac{5}{2}$		0		$+\infty$
$f(x) = -x^2 - 5x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{4}$ max	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(Vezi fig. 30)

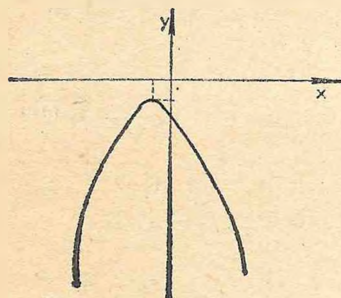


Fig. 29

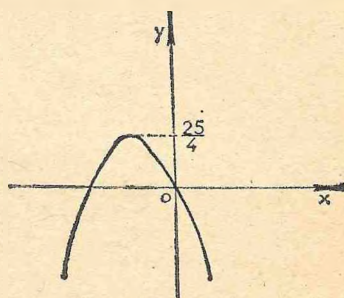


Fig. 30

I.3.34.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 5x + 4$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \text{ pentru } x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty) \\ -x^2 + 5x - 4 \text{ pentru } x \in (1, 4). \end{cases}$$

I.3.35. $$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 \text{ pentru } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

I.3.36. $$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, -1] \\ -x^2 - x + 1 \text{ pentru } x \in (-1, 0) \\ -x^2 + x + 1 \text{ pentru } x \in [0, 1) \\ x^2 + x - 1 \text{ pentru } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

I.3.37 $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 7 \text{ pentru } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ 1 \text{ pentru } x \in [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2] \\ 7 - 2x^2 \text{ pentru } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}). \end{cases}$$

I.3.38. $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x-7 \text{ pentru } x\in(-\infty,-3]\cup\\ \quad\cup[3,+\infty)\\ -3x+11 \text{ pentru } x\in(-3,1]\cup[2,3)\\ -2x^2+3x+7 \text{ pentru } x\in(1,2)\end{cases}$

I.3.39. $f(x)=\begin{cases}-x+7 \text{ pentru } x\in(-\infty,1]\cup[5,+\infty)\\ 2x^2-13x+17 \text{ pentru } x\in(1,3]\cup[4,5)\\ x-7 \text{ pentru } x\in(3,4).\end{cases}$

I.3.40. $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x-14 \text{ pentru } x\in(-\infty,-4)\cup\\ \quad\cup(4,+\infty)\\ -3x+18 \text{ pentru } x\in[-4,1)\cup(2,4]\\ -2x^2+3x+14 \text{ pentru } x\in[1,2].\end{cases}$

I.3.41. Condițiile sînt: $f(8)=0$; $-\dfrac{b}{2a}=6$; $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=$ $=-12\Rightarrow a=0$ și $a=3$, $b=0$ și $b=-36$, $c=0$ și $c=96$; funcția este $f(x)=3(x^2-12x+32)$.

I.3.42. 1°. $AM=x$; $MB=a-x$. Notăm cu y suma ariilor celor două triunghiuri; $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2x^2-2ax+a^2)$.

Valoarea minimă pentru $x=\dfrac{a}{2}$.

2°. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

3°. Vezi figura 31.

I.3.43. $BC=a$; $AD=m$; $DM=x$; $MA^2=(m-x)^2$

Teorema medianei implică $MB^2+MC^2=2x^2+\dfrac{a^2}{2}$

deci: $MB^2+MC^2+MA^2=2x^2+\dfrac{a^2}{2}+(m-x)^2=$

$=3x^2-2mx+m^2+\frac{a^2}{2}$. Valoarea minimă pentru $x=\frac{m}{3}$ deci

$MD=\frac{m}{3}$ (vezi fig. 32).

I.3.44. Aria dreptunghiului este egală cu $EF \cdot GF$.

$\Delta ABC \sim \Delta CHG \Rightarrow EF=\frac{b}{h}(h-x)$.

$A=bx-\frac{bx^2}{h}$. Valoarea trinomului este maximă pentru

$x=\frac{h}{2}$, $A=\frac{b \cdot h}{4}$. (Vezi fig. 33).

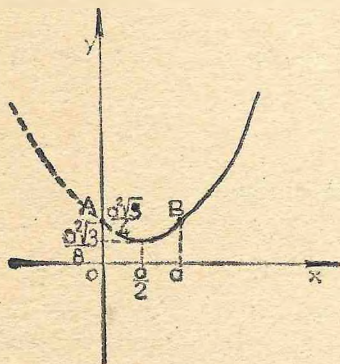


Fig. 31

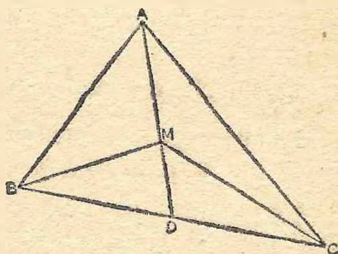


Fig. 32

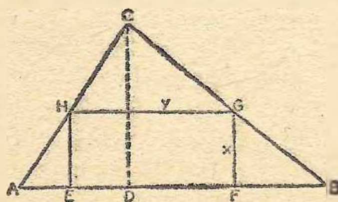


Fig. 33

I.3.45. $\frac{x^2 + ax}{x^2 - 2x - 3} = m$; $16m^2 - 4(3 - a)m + a^2 \geqslant 0$. Pentru ca funcția să admită un maxim și un minim trebuie ca trinomul în m să aibă rădăcini reale și diferite adică $a \in (-3, 1)$.

I.3.46. $\frac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4} = m$; $(3 - 2m)x^2 - (5 - 3m)x + 5 - 4m = 0$. Punînd condiția $\Delta \geqslant 0$ rezultă $m \in \left[1, \frac{35}{23}\right]$; $y_{max} = \frac{35}{23}$ pentru $x = -5$.

Minimumul este 1 pentru $x = -6$.

I.3.47. $y_{max} = \frac{24}{11}$ pentru $x = -6$.

I.3.48. $y_{max} = \frac{1}{4}$ pentru $x = -2$; $y_{min} = 1$ pentru $x = -\frac{1}{2}$.

I.3.49. Nu are nici maxim nici minim.

I.3.50. $y_{max} = 1$ pentru $x = 1$.
$y_{min} = -3$ pentru $x = -1$.

I.3.51. $x^2 - (m - a)x + 1 - am = 0$; $m^2 + 2am + a^2 - 4 \geqslant 0$. Maxim pentru $x = -(a + 1)$, minim pentru $x = -(a - 1)$. Deci $a = 3$.

I.3.52. Notăm cu x, y catetele, z ipotenuza, $2p$ perimetrul și r raza cercului înscris. Avem $x + y + z = 2p$; $x + y = z + 2r$; $x + y = p + r$; $xy = 2pr$. Catetele sînt rădăcinile ecuației $x^2 - (p + r)x + 2pr = 0 \Rightarrow \Delta = r^2 - 6pr + p^2 \geqslant 0$ sau $r \leqslant (3 - 2\sqrt{2})p$, $r \geqslant (3 + 2\sqrt{2})p$. Ultima nu poate fi admisă deoarece $x + y = p + r \geqslant 4p + \sqrt{2}p$, ceea ce este imposibil căci $x + y < 2p$. Deci maximumul este $r = (3 - 2\sqrt{2})p$ de unde rezultă $x = y = p(2 - \sqrt{2})$.

Triunghiul căutat este triunghiul isoscel.

I.3.53. Se ordonează după puterile lui x și $x_{min} = -\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1^2 + a_2^2}$. Valoarea minimă este $y_{min} = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2}$.

I.3.54. 1°. $\Delta \leqslant 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right]$.

2°. $\Delta \leqslant 0$ și $m - 2 > 0 \Rightarrow m \in [3, +\infty)$.

3°. $\Delta \leqslant 0$ și $m > 0 \Rightarrow m \in [1, +\infty)$.

4°. $\Delta \leqslant 0$ și $m < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$.

5°. $\Delta \leqslant 0$ și $m + 6 < 0 \Rightarrow m \in \Phi$.

I.3.55. 1°. $\Delta = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$. 2°. $-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow m = -1$. 3°. Se ordonează după m și se anulează coeficientul lui m; $x = -1$, $A(-1, 3)$. 4°. $\Delta < 0$, $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$. 5°. $\Delta < 0$ și $m > 0 \Rightarrow m \in \Phi$. 6°. $\Delta < 0$ și $m < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.

I.3.56. 1°. $m + 1 < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1)$. 2°. $x = \frac{1}{m+1}$ și $y = \frac{m}{m+1}$. Eliminînd pe m vom obține $y = 1 - x$.

I.3.57. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, -1] \cup \\ \cup [1, +\infty) \\ 1 \text{ pentru } x \in (-1, 1). \end{cases}$

(Vezi figura 34)

I.3.58. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 17 & \text{pentru } x \in (-\infty, -4] \cup \\ \quad \cup [4, +\infty) \\ 15 & \text{pentru } x \in (-4, -1] \cup [1, 4) \\ 17 - 2x^2 & \text{pentru } x \in (-1, 1). \end{cases}$

(Vezi figura 35)

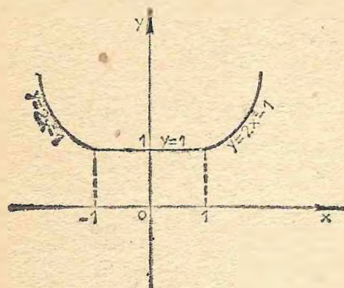


Fig. 34

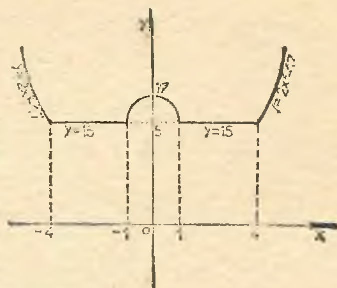


Fig. 35

I.3.59. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 13 & \text{pentru } x \in (-\infty, -3] \cup \\ \cup [3, +\infty) \\ 5 & \text{pentru } x \in (-3, -2) \cup (2, 3) \\ 13 - 2x^2 & \text{pentru } x \in [-2, 2]. \end{cases}$

(Vezi figura 36)

I.3.60. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{pentru } x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup \\ \quad \cup [\sqrt{3}, +\infty) \\ 3 - x^2 & \text{pentru } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}). \end{cases}$

(Vezi figura 37)

I.3.61. $f(x) = \begin{cases} -5x + 13 & \text{pentru } x \in (-\infty, -3) \cup \\ \quad \cup [4, +\infty) \\ 2x^2 - 5x - 5 & \text{pentru } x \in [-3, 1] \\ 5x - 13 & \text{pentru } x \in (1, 3] \\ -2x^2 + 5x + 5 & \text{pentru } x \in (3, 4). \end{cases}$

(Vezi figura 38)

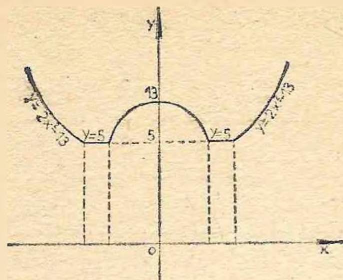


Fig. 36

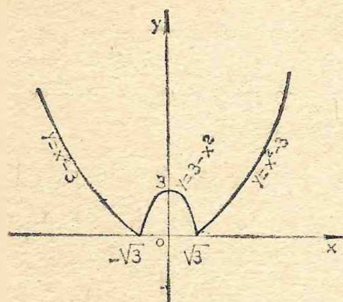


Fig. 37

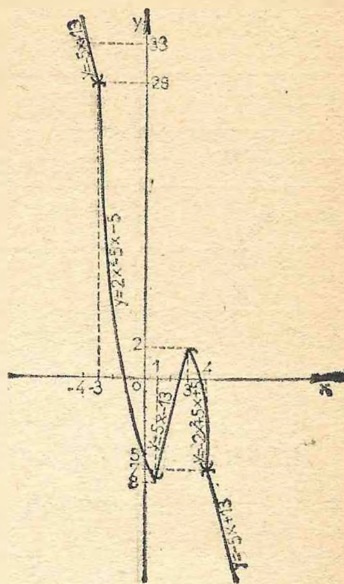


Fig. 38

I.3.62.

x	$-\infty$	-3		0		2		3		5	$+\infty$
$9-x^2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x^2-7x+10$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x(9-x^2)(x^2-7x+10)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in [-3, 0] \cup [2, 3] \cup [5, +\infty).$$

I.3.63. $x^2 + 1 > 0$ și $x^2 + 3x + 7 > 0$ pentru orice $x \in R$. Deci:

x	$-\infty$		-3		3		5		$+\infty$
$5 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x^2 - 9$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x^2 - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2 + x - 1$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$E(x)$		$+$	|	$-$	|	$+$	0	$-$	

$$x \in (-3, 3) \cup [5, +\infty).$$

I.3.64. $x^2 + x + 1 > 0$ pentru orice $x \in R$.

x	$-\infty$		-5		-1		1		3		4		5		11		$+\infty$
$25 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1 - x^2$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x^2 - 15x + 44$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3 - x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	
$-x^2 - 1$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$E(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	

$$x \in [-5, -1] \cup [1, 3) \cup (4, 5] \cup (11, +\infty).$$

I.3.65. $x \in (-1, 1) \cup (2, 3)$.

I.3.66. $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (1, 3) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$.

I.3.67. $x \in \left(-\frac{7}{3}, 1\right)$.

I.3.68. *Soluția I*: $(x-1)^2(x-4)^2-(x-1)^2(x-6)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4-x+6)(x-4+x-6) \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x-10) \geqslant 0$, $x \in [5, +\infty)$.

Soluția II: $(x^2-5x+4-x^2+7x-6)(x^2-5x+4+x^2-7x+6) \geqslant 0$ etc.

I.3.69. $x \in \left(\frac{19}{5}; \frac{119}{25}\right)$.

I.3.70. $x \in (-2, 0) \cup (1, 2)$.

I.3.71. După efectuarea calculelor revine la:

$$\frac{-4x^2-4x+3}{x^2-1} < 0.$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

I.3.72. Revine la:

$$\frac{3(x-2)(3x+2)(2x-1)(3x-1)}{(2x+1)(x^2-1)} > 0.$$

$$x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2, +\infty).$$

I.3.73. Se descompune membrul stîng în $(x^2-1)(x^2-4)$, deci:

$$x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty).$$

I.3.74. $x \in (-2\sqrt{2}, -1) \cup (1, 2\sqrt{2})$.

I.3.75. $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$.

I.3.76. $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

I.3.77. $x \in (2, 4)$.

I.3.78. $x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

I.3.79. $x \in (1, 2)$.

I.3.80. $x \in \left(\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}; 1\right)$.

I.3.81. $x \in (2, \sqrt{5})$.

I.3.82. $x \in \left(\dfrac{11}{12}; 3\right)$.

I.3.83. $x \in \left(-1, -\dfrac{1}{4}\right) \cup (1, 2)$.

I.3.84. $x \in \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.

I.3.85. Rezolvînd fiecare inegalitate revine la a afla intersecția următoarelor intervale:

$A = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$; $B = (-2, 1) \cup (2, +\infty)$; $C =$

$$= (-2, 0] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (2, +\infty)$$

deci $x \in (-2, 0] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 1\right) \cup (4, +\infty)$.

I.3.86. Revine la intersecția următoarelor intervale:

$A = (-\infty, -5) \cup (0, 4)$; $B = (-2\sqrt{3}, -\sqrt{5}) \cup (0, \sqrt{5}) \cup (3, 2\sqrt{3}) \cup (5, +\infty)$; $C = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ adică

$$x \in (1, \sqrt{5}) \cup (3, 2\sqrt{3}).$$

I.3.87. Se explicitează modulul și rezultă $x \in [0, 4]$.

I.3.88. Revine la a afla valorile lui x pentru care $-3 < \frac{x-1}{x+1} < 3$ de unde rezultă $x \in (-\infty, -2) \cup$

$$\cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

I.3.89. $x \in \Phi$.

I.3.90. $x \in (-\infty, -3) \cup (12, +\infty)$.

I.3.91. $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{33}}{6}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},\right.$

$$\left.\frac{3+\sqrt{33}}{6}\right).$$

I.3.92. $x \in \left(-\infty, -\frac{24}{7}\right] \cup \left[-\frac{18}{17}, +\infty\right)$.

I.3.93. Relația este echivalentă cu

$$-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3.$$

Numitorul fiind pozitiv pentru orice x avem sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - mx + 1 > -3(x^2 + x + 1) \\ x^2 - mx + 1 < 3(x^2 + x + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + (3-m)x + 4 > 0 \\ 2x^2 + (3+m)x + 2 > 0 \end{cases}$$

care sînt verificate pentru orice x dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 6m - 55 \leqslant 0 \\ \Delta_2 = m^2 + 6m - 7 \leqslant 0 \end{cases} \text{ adică } m \in [-5, 1].$$

I.3.94. Regiunea hașurată din figura 39.

I.3.95. Regiunea hașurată din figura 40.

I.3.96. Regiunea hașurată din figura 41.

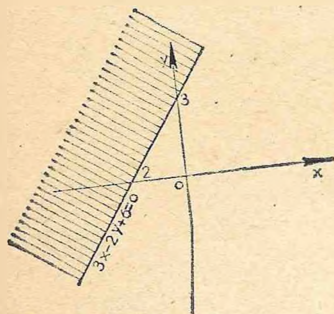


Fig. 39

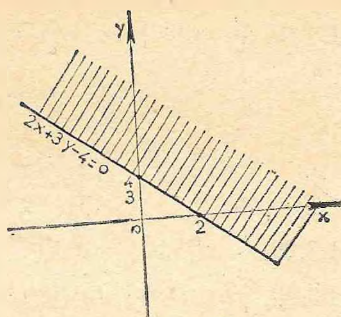


Fig. 40

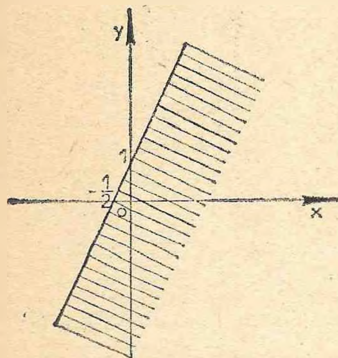


Fig. 41

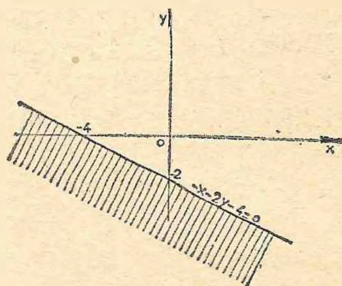


Fig. 42

I.3.97. Regiunea haşurată din figura 42.

I.3.98. a) Dacă $x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x+y<1$.
b) Dacă $x \leqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad y-x<1$.
c) Dacă $x \leqslant 0, \quad y \leqslant 0, \quad -y-x<1$.
d) Dacă $x \geqslant 0, \quad y \leqslant 0, \quad x-y<1$.

În final, pătratul haşurat din figura 43.

I.3.99. Regiunea haşurată din figura 44.

I.3.100. Regiunea haşurată din figura 45.

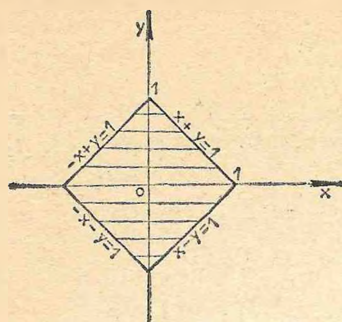


Fig. 43

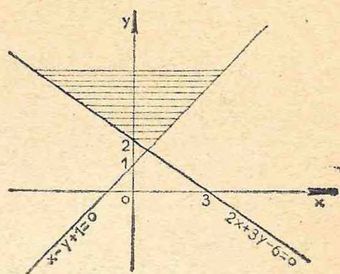


Fig. 44

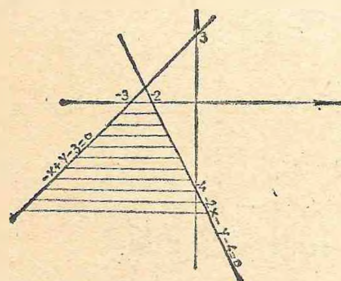


Fig. 45

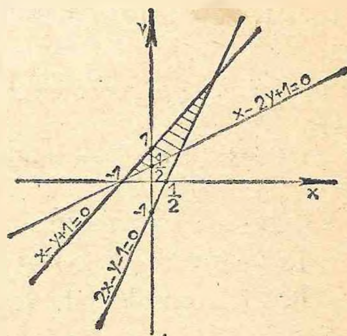


Fig. 46

I.3.101. Regiunea hașurată din figura 46.

I.3.102. a) *Soluție algebrică.* Pentru $x \in (-\infty, 0)$, $x \in \phi$; pentru $x \in [0, 1]$ admite soluția $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$; pentru $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ admite soluția $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$; pentru $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ admite soluția $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Deci $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) *Soluție grafică.* Notăm $y_1 = |2x - 3| + |1 - x| - 2|x|$ și $y_2 = 1 + x$. Vom reprezenta grafic pe y_1 și y_2 iar apoi vom alege.

$$y_1 = \begin{cases} -x + 4 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ -5x + 4 \text{ pentru } x \in [0, 1] \\ -3x + 2 \text{ pentru } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \\ x - 4 \text{ pentru } x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Din figura 47 se vede că $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

I.3.103. Pentru ca radicalul să existe este necesar ca $x \in [2, +\infty)$.

Cazul a): $x - 4 \leqslant 0 \Rightarrow x \in [2, 4]$.

Cazul b): $x - 4 > 0 \Rightarrow x - 2 > (x - 4)^2 \Rightarrow x \in (3, 6)$.

În final, considerînd cele două cazuri, $x \in [2, 6)$.

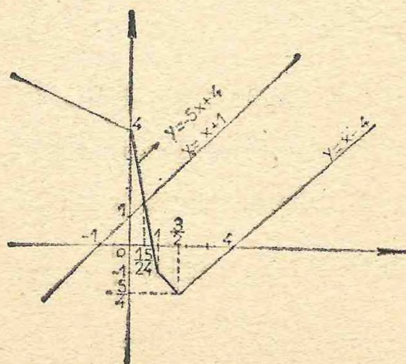


Fig. 47

I.3.104. Inecuația are sens pentru $x \in [6, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat $x + 2 \geqslant 2\sqrt{x - 6} \Leftrightarrow x^2 + 28 \geqslant 0$ care este adevărată pentru orice $x \in R$. Deci $x \in [6, +\infty)$.

I.3.105. Inecuația are sens pentru $x \in [-4, 2]$. $\sqrt{x + 4} > 1 + \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow 2x + 1 > 2\sqrt{2 - x}$; $2x + 1 > > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. În final $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

I.3.106. Trebuie ca $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Ridicînd la pătrat obținem $5 - x > \sqrt{(x + 1)(2x - 5)}$. Dacă $x > 5$, primul membru este negativ iar al doilea pozitiv și deci inegalitatea este falsă. Dacă $x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right]$ ridicăm din nou la pătrat și obținem $x^2 + 7x - 30 < 0$. Deci, în final, $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$.

I.3.107. $x \in (-2, 2]$.

I.3.108. $x \in \left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

I.3.109. a) $1 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$; $x \geqslant \sqrt{1 - x^2}$ și cu $x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1 - x^2 \Rightarrow |x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

b) $x \in [-1, 1]$ $|x| \leqslant \sqrt{1 - x^2}$ sau $x^2 \leqslant 1 - x^2 \Rightarrow x \geqslant \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

I.4. ECUAȚIA DE GRADUL DOI. ECUAȚII IRAȚIONALE; SISTEME DE ECUAȚII

Ecuația de gradul II cu coeficienți reali este o ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ și $a, b, c \in R$. Reamintim că $P = x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației, iar Δ reprezintă discriminantul sau realizantul ecuației.

Pentru rezolvarea problemelor în care se cere să se studieze natura și semnul rădăcinilor ecuației considerăm util tabelul de mai jos.

Δ	P	S	Natura și semnul rădăcinilor ecuației
$\Delta = 0$	$P > 0$	$S > 0$	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 = x_2 > 0$
		$S < 0$	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 = x_2 < 0$
	$P = 0$	$S = 0$	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 = x_2 = 0$
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	$x_1; x_2 \in R$; $x_1 > 0, x_2 > 0$
		$S < 0$	$x_1; x_2 \in R$, $x_1 < 0, x_2 < 0$
	$P < 0$	$S > 0$	$x_1; x_2 \in R$; $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $\lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
		$S < 0$	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ $\lvert x_2\rvert > \lvert x_1\rvert$
		$S = 0$	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ $\lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert$
	$P = 0$	$S > 0$	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$
		$S < 0$	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$
	P nedefinit	S nedefinit	Ecuația revine la $bx + c = 0$
$\Delta < 0$			Rădăcinile nu sînt reale

Exerciții de învățămînt programat

I.4.1. Ecuația de gradul doi, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in R$ admite rădăcini pozitive dacă:

a) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \end{cases}$

I.4.2. Ecuația de gradul doi admite rădăcini de semne contrare, cu rădăcina negativă mai mare în valoare absolută, dacă:

a) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases}$

I.4.3. Ecuația de gradul doi admite rădăcini de același semn, dacă:

a) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ S > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \end{cases}$

I.4.4. Ecuația de gradul doi admite rădăcini de semne contrare dacă:

a) $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases}$

I.4.5. Care din următoarele afirmații este corectă și care este greșită?

a) Dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite ca rădăcină pe $x_1 = a + bi$, atunci admite ca rădăcină și pe $x_2 = a - bi$.

b) Dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in R$ admite ca rădăcină pe $x_1 = a + bi$ atunci admite ca rădăcină și pe $x_2 = a - bi$.

I.4.6. În graficul alăturat (fig. 48) este reprezentată funcția $y = x^2 - 5x + 6$. Privind graficul, spuneți care sînt rădăcinile ecuației: $y = 0$:

a) 2 și 3

b) $\frac{5}{2}$ și 6

c) 2 și $\frac{5}{2}$

d) 2; $\frac{5}{2}$; 3 și 6.

În exercițiile de mai jos se pune problema poziției rădăcinilor ecuației de gradul al II-lea în raport cu două numere reale.

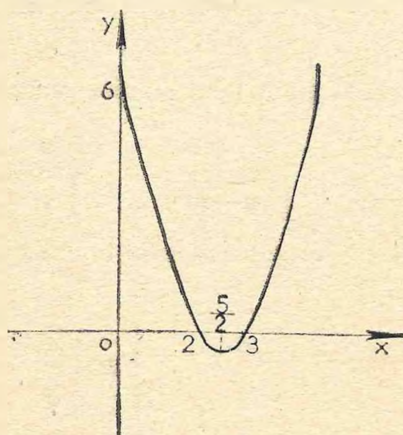


Fig. 48

I.4.7. Studiind graficele alăturate să se precizeze care sînt condițiile pentru ca $\alpha < x_1 < x_2$ (fig. 49).

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \alpha. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f\left(-\frac{b}{2a}\right) < f(\alpha) \\ a \cdot f(\alpha) < 0. \end{cases}$

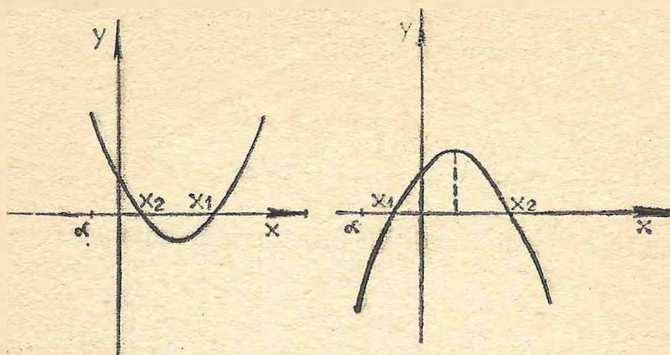


Fig. 49

I.4.8. Același enunț pentru ca $x_1 < \alpha < x_2$ (fig. 50).

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ \dfrac{-b}{2a} < \alpha. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{-b}{2a} > 0 \end{cases}$

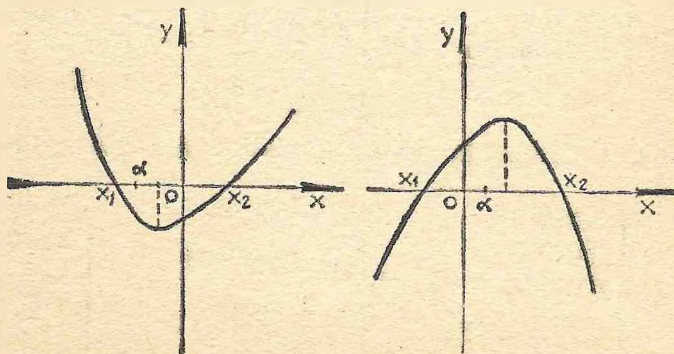


Fig. 50

I.4.9. Dar pentru ca $x_1 < x_2 < \alpha$ (Pentru ușurință schițați graficul $y = ax^2 + bx + c$ în cazurile $a > 0$ și $a < 0$ pentru toate problemele care vor urma).

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha. \end{cases}$

I.4.10. Care din condițiile următoare trebuie puse pentru ca $\alpha < x_1 < \beta < x_2$?

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha. \end{cases}$

I.4.11. Dar pentru ca: $x_1 < \alpha < \beta < x_2$?

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0. \end{cases}$

I.4.12. Dar pentru ca $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$?

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$

I.4.13. În cazul în care $a > 0$ condiția ca $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ este:

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha. \end{cases}$

I.4.14. Condiția ca: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ este:

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$

Exerciții și probleme propuse

I.4.15. Să se determine următoarele mulțimi:

$$A_1 = \{x \in R \mid x^2 + x + 3 = 0\}$$
$$A_2 = \{x \in R \mid x^2 + |x| - 1 = 0\}$$
$$A_3 = \{x \in R \mid x^2 + |x - 1| - 3 = 0\}$$
$$A_4 = \{x \in R \mid x^2 - 5|x| + 6 = 0\}$$
$$A_5 = \{x \in R \mid x^2 - 4|x| + 3 = 0\}$$
$$A_6 = \{x \in R \mid |x^2 - 1| + |x^2 - 9| = 1\}$$
$$A_7 = \{x \in R \mid |x^2 - 5x + 4| - x^2 + 1 = 0\}$$
$$A_8 = \{x \in R \mid |x - 1| \cdot |x - 2| = 3\}.$$

I.4.16. Să se formeze ecuațiile de gradul al doilea cunoscînd rădăcinile:

1°. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$; 2°. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; 3°. $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$; 4°. $x_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$;

5°. $x_1 = 2 - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 2 + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

I.4.17. Fie ecuația: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$; $\alpha, \beta \in R$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt:

1°. Pătratele rădăcinilor acestei ecuații.

2°. Cuburile rădăcinilor acestei ecuații.

3°. Pătratele inverselor rădăcinilor ecuației date.

4°. $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$; $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$.

5. $y_1 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; $y_2 = \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$.

I.4.18. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2, $a \neq 0$. Să se formeze ecuația:

1°. ale cărei rădăcini sînt egale în valoare absolută și de semne contrare cu rădăcinile ecuației date;

2°. ale cărei rădăcini sînt inversele rădăcinilor ecuației date;

3°. ale cărei rădăcini sînt egale cu rădăcinile ecuației date mărite cu același număr m;

4°. ale cărei rădăcini sînt egale cu rădăcinile ecuației date multiplicate cu același număr k.

Aplicație numerică: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$m = 3,\ k = 8.$$

I.4.19. Să se determine parametrul m din ecuația: $x^2 - 8x + m = 0$ astfel încît dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ei să existe relațiile:

1°. $x_1 = x_2$. 2°. $x_1 = 3x_2$.

3°. $x_1 = \frac{1}{x_2}$. 4°. $x_1 = -\frac{1}{x_2}$.

5°. $3x_1 - 4x_2 = 3$.

6°. $x_1^2 + x_2^2 = 40$.

I.4.20. Să se determine $m, n \in R$ astfel încît ecuațiile:

$$(5m - 52)x^2 - (m - 4)x + 4 = 0;$$

$$(2n + 1)x^2 - 5nx + 20 = 0,$$

să aibă aceleași rădăcini.

I.4.21. Să se găsească relația dintre a, b, c pentru ca rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ să fie proporționale cu două numere date α și β.

I.4.22. Fără să se rezolve ecuația $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ să se exprime în funcție de m următoarele expresii:

1°. $E_1(m) = x_1^2 + x_2^2$.

2°. $E_2(m) = x_1^3 + x_2^3$.

3°. $E_3(m) = x_1^4 + x_2^4$.

4°. $E_4(m) = x_1^2 - x_2^2$.

5°. $E_5(m) = \frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

I.4.23. Să se găsească o relație independentă de m între rădăcinile ecuației:

$$(m + 6)x^2 - 4mx + m + 1 = 0.$$

I.4.24. Să se determine valorile lui $m \in R$ din ecuația

$$2mx^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$$

astfel încît rădăcinile ecuației să fie:

a) inverse una alteia;
b) opuse una alteia;
c) egale.

I.4.25. Să se determine parametrul $m \in R$ din ecuația

$$(m + 1)x^2 - mx + 2 = 0$$

astfel încît o rădăcină să fie dublul celeilalte.

I.4.26. Să se determine valorile parametrului $m \in R$ din ecuația

$$(m - 1)\,x^2 - 2mx + m - 2 = 0$$

astfel încît aceasta să admită:

1°. Rădăcini reale.

2°. Rădăcini reale și distincte.

3°. Rădăcinile să nu fie reale.

4°. Rădăcini de același semn.

5°. Rădăcini pozitive.

6°. Rădăcini negative.

7°. Rădăcini de semne contrare și rădăcina pozitivă mai mare în valoare absolută decît cea negativă.

8°. Rădăcini de semne contrare și rădăcina negativă mai mare în valoare absolută decît cea pozitivă.

9. O rădăcină zero.

10°. Ecuația să devină o ecuație de gradul I.

I.4.27. Să se determine p și $q \in R$ din ecuația $x^2 + px + q = 0$ astfel ca o rădăcină să fie tripla celeilalte și suma pătratelor rădăcinilor să fie 40.

I.4.28. În ecuația $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ să se determine α, β astfel ca diferența rădăcinilor să fie 4 iar diferența cuburilor lor 208.

Să se discute natura și semnul rădăcinilor următoarelor ecuații în funcție de parametrul $m \in R$.

I.4.29. $mx^2 + (3m - 1)x + 2m - 1 = 0.$

I.4.30. $(5m + 1)x^2 + (7m + 3)x + 3m = 0.$

I.4.31. $4x^2 - 4(m - 1)x - m + 3 = 0.$

I.4.32. $(1 - m)^2x^2 - 2(1 - m^2)x + 3m^2 - m + 2 = 0.$

I.4.33. $(2m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0.$

I.4.34. Să se determine parametrul $m \in R$ din ecuația: $2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$ astfel încît diferența rădăcinilor să fie 1.

I.4.35. Fie ecuația: $(m + 1)x^2 - 2mx + 4 - 3m = 0$. Să se determine $m \in R$ astfel încît rădăcinile ecuației să fie:

1°. Reale și diferite; 2°. Reale și egale; 3°. Complexe; 4°. De același semn; 5°. Pozitive; 6°. Negative; 7°. De semne contrare; 8°. De semne contrare iar rădăcina pozitivă în valoare absolută mai mare; 9°. De semne contrare iar rădăcina negativă mai mare în valoare absolută; 10°. Opuse; 11°. O rădăcină 0; 12°. O rădăcină 0 iar cealaltă pozitivă; 13°. O rădăcină zero iar cealaltă negativă; 14°. Să se discute

natura și semnul rădăcinilor ecuație ; 15°. Verificați rezultatele obținute la punctele 1° — 13° pe tabelul de la punctul 14°.

I.4.36. Fiind date ecuațiile:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \text{ și } a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

se cere:

1°. Să se determine ce relație trebuie să existe între coeficienții acestor ecuații astfel ca ele să aibă o rădăcină comună.

2°. Să se afle expresia rădăcinii comune.

3°. Să se formeze ecuația de gradul II care este satisfăcută de către celelalte rădăcini ale ecuațiilor.

I.4.37. Să se determine parametrul $m \in R$ astfel ca următoarele ecuații să aibă o rădăcină comună:

a) $(m + 1)x^2 - (5m + 1)x + 3m = 0$
$(2m - 1)x^2 + (1 - 9m)x - 3m = 0$

b) $(m - 1)x^2 - m(m - 2)x - 2m^2 - m + 1 = 0$
$(m + 1)x^2 - m(m + 2)x - m - 1 = 0$

I.4.38. Fie ecuația $(2m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ unde m este un parametru real. Să se afle pentru ce valori ale lui m rădăcinile reale ale ecuației satisfac relația:

$$x_1^3 + x_2^3 < x_1x_2^3 + x_1^3x_2.$$

Folosind condițiile de la I.4.1. — I.4.9. să se determine valorile parametrului $m \in R$ astfel ca rădăcinile ecuațiilor următoare să îndeplinească condițiile indicate.

I.4.39. $(m - 2)x^2 - (m - 4)x + m - 3 = 0$

$$-1 < x_1 < x_2.$$

I.4.40. $(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$

$$x_1 < 1 < x_2.$$

I.4.41. $(m + 1)x^2 - x - m = 0$

$$x_1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < x_2.$$

I.4.42. $(2 - m)x^2 - 2mx + m(m - 3) = 0$

$$x_1 < 1 < 2 < x_2.$$

I.4.43. $(m - 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$

$$x_1 < x_2 < \frac{1}{2}.$$

I.4.44. $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x + m = 0$

$$1 < x_1 < x_2 < 2.$$

I.4.45. Fie $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in Q$. Să se găsească condiția ca ecuația $ax^2 + bx + c + m(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0$ să admită rădăcini raționale oricare ar fi $m \in R$.

Să se discute, după valorile parametrului m, natura și semnele rădăcinilor ecuațiilor:

I.4.46. $2(m - 1)x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 2(m - 1) = 0.$

(A.S.E., București, 1969.)

I.4.47. $x^6 + (m + 1)(x^2 + 1) + 1 = 0.$

(A.S.E., București)

I.4.48. $2mx^4 - (3m - 8)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (3m - 8)x + 2m = 0.$

Să se găsească coordonatele punctelor de intersecție pentru următoarele curbe, dîndu-se de fiecare dată și soluția grafică:

I.4.49. $y = x^2 - 4x + 3$ și $y = 2 - x$.

I.4.50. $x^2 - y + 1 = 0$ și $x - y = 0$.

I.4.51. $y - x^2 + x - 2 = 0$ și $y - 3x + 2 = 0$.

I.4.52. $y + x^2 + 1 = 0$ și $y = x^2 + 6x - 9$.

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații:

I.4.53. $\begin{cases} x + y = 10 \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{35}{3}. \end{cases}$

I.4.54. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19(x + y) \\ x^3 - y^3 = 7(x - y). \end{cases}$

(I.P., București, 1970.)

I.4.55. $\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x + y) = 25 \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

I.4.56. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

I.4.57. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy = 68 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3xy = 16. \end{cases}$

I.4.58. $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11. \end{cases}$

(I.P., Iași, 1971.)

I.4.59. $\begin{cases} x + y + z = ab \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{b}{a} \\ xyz = a^3. \end{cases}$

(A.S.E., București.)

I.4.60. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10. \end{cases}$

(I.P., Galați, 1970.)

I.4.61. $\begin{cases} xy + yz + xz = 14 \\ x^2 + y^2 = z + 1 \\ x + y + z = 7. \end{cases}$ unde $x, y, z \in R$

(I.P., Galați, 1969.)

I.4.62. $\begin{cases} \dfrac{xy + xz}{a} = \dfrac{yx + yz}{b} = \dfrac{zx + zy}{c} \\ xy + zx + yz = (a + b + c)xyz. \end{cases}$

(A.S.E., București.)

I.4.63. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15. \end{cases}$

(A.S.E., București.)

I.4.64. $\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{d}. \end{cases}$

Să se rezolve ecuațiile:

I.4.65. $\sqrt{x + 4} = 7.$

I.4.66. $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}.$

I.4.67. $x - \sqrt{25 - x^2} = 1.$

I.4.68. $x + \sqrt{10x + 6} = 9.$

I.4.69. $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 5} = \sqrt{2x + 18}.$

I.4.70. $\dfrac{\sqrt{4x + 20}}{4 + \sqrt{x}} = \dfrac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

I.4.71. $\dfrac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\dfrac{1 + bx}{1 - bx}} = 1.$

I.4.72. $\sqrt[3]{x + a} - \sqrt[3]{x - a} = b.$

1.4.73. $\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{2}{5}$.

1.4.74. $\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}}=2x-1$.

1.4.75. $\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1+x}=0$.

1.4.76. $\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}$.

1.4.77. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=2$.

1.4.78. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-2\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{1-x}$.

1.4.79. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

1.4.80. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$.

1.4.81. $\sqrt[3]{(x+2)^2}+4\sqrt[3]{(x-2)^2}=4\sqrt[3]{(x+2)(x-2)}$.

1.4.82. $\sqrt[n]{(9+x)^2}+2\sqrt[n]{(9-x)^2}=3\sqrt[n]{81-x^2}$.

1.4.83. $\dfrac{\sqrt[3]{x+28}-\sqrt[3]{x-28}}{\sqrt[3]{x+28}+\sqrt[3]{x-28}}=\dfrac{1}{3}$.

Să se rezolve sistemele de ecuații:

1.4.84. $\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=a.\\ x+y=4.\end{cases}$

1.4.85. $\begin{cases}\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[5]{y^3}=35\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{y}=5.\end{cases}$

I.4.86. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78. \end{cases}$

(A.S.E., București.)

I.4.87. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}} = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

(A.S.E., București, 1970).

I.4.88. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}}{y} = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$

(A.S.E., București, 1970.)

I.4.89. $\begin{cases} 2(x-y)\sqrt{y} = \sqrt{x} \\ \dfrac{(x+y)\sqrt{x}}{3} = \sqrt{y}. \end{cases}$

I.4.90. $\begin{cases} \sqrt{yz} - x = 5. \\ \sqrt{zx} - y = -1 \\ \sqrt{xy} - z = -7. \end{cases}$

(G.M.B., 1965.)

I.4.1. Condiția a) este corectă și completă; condiția b) nu este completă, fiindcă și pentru $\Delta = 0$ rădăcinile pot să fie pozitive, dacă $P > 0$ și $S > 0$; condiția c) este incompletă, fiindcă arată doar că rădăcinile au același semn. Desigur, este vorba de rădăcini reale.

I.4.2. Condiția corectă este d); condiția c) nu este corectă, fiindcă pentru $\Delta = 0$ rădăcinile sînt egale și deci nu pot avea semne contrare.

I.4.3. Condiția c) este corectă și completă; condiția b) nu conține cazul cînd $\Delta = 0$, caz în care este evident că rădăcinile au același semn.

I.4.4. Condiția corectă este b); condiția a) nu este corectă fiindcă în cazul în care $\Delta = 0$ rădăcinile sînt egale și nu pot avea semne contrare; condiția d) exprimă faptul că rădăcinile sînt de semne contrare, iar rădăcina pozitivă în valoare absolută mai mare, deci este un caz particular al condiției b).

I.4.5. Corectă este exprimarea b) fiindcă trebuie impusă condiția $a, b, c \in R$.

I.4.6. a) **I.4.7.** a) **I.4.8.** b) **I.4.9.** c). **I.4.10.** c). **I.4.11.** c). **I.4.12.** b). **I.4.13.** a). **I.4.14.** c).

I.4.15. $A_1 = \Phi$; $A_2 = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; $A_3 = \left\{-1, \quad \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$; $A_4 = \{-3, -2, 2, 3\}$;

$A_5 = \{-3, -1, 1, 3\}$; $A_6 = \Phi$; $A_7 = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$; $A_8 = \left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

I.4.16. 1°. $x^2 - Sx + P = 0$, $S = x_1 + x_2 = 4$, $P = x_1x_2 = 3$, $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2°. $x^2 - 9 = 0$. 3°. $x^2 - 4x + 1 = 0$. 4°. $x^2 - x + 1 = 0$. 5°. $4x^2 - 16x + 19 = 0$.

I.4.17. 1°. $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $S = y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \alpha^2 - 2\beta$, $P = y_1y_2 = (x_1x_2)^2 \Rightarrow y^2 - (\alpha^2 - 2\beta)y + \beta^2 = 0$.

2°. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -\alpha^3 + 3\alpha\beta \Rightarrow y^2 + (\alpha^3 - 3\alpha\beta)y + \beta^3 = 0$.

3°. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{\alpha^2 - 2\beta}{\beta^2} \Rightarrow \beta^2y^2 - (\alpha^2 - 2\beta)y + 1 = 0$.

4°. $\beta y^2 + \alpha(\beta + 1)y + (\beta + 1)^2 = 0$.

5°. $y_1 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$; $y_2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1x_2} = \varepsilon \cdot \frac{(x_1 + x_2)\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{x_1x_2}$,

cu $\varepsilon = \pm 1$ fiindcă $x_1 - x_2 = \varepsilon\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$.

În final:

$$y^2 - \frac{\alpha^2 - 2\beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{\beta}y - \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\beta)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{\beta^2} = 0$$

$$y^2 - \frac{\alpha^2 - 2\beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{\beta}y + \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\beta)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{\beta^2} = 0.$$

I.4.18. 1°. $ay^2 - by + c = 0$. 2°. $cy^2 + by + a = 0$.
3°. $ay^2 + (b - 2am)y + am^2 - bm + c = 0$.
4°. $ay^2 + bky + k^2c = 0$.

Se folosesc relațiile între rădăcini și coeficienți.

Exemplu: 1°. $y_1 = -x_1$, $y_2 = -x_2$, $S = y_1 + y_2 = -2(x_1 + x_2) = -2 \cdot \frac{-b}{2a} = \frac{b}{a}$. $P = y_1 y_2 = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ etc.

I.4.19. 1°. $\Delta = 0 \Rightarrow m = 16$. 2°. $S = 4x_2 = 8$, $x_2 = 2$; $x_1 = 6$; $m = 12$.

3°. $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow m = 1$. 4°. $m = -1$. 5°. $x_1 + x_2 = 8$, $3x_1 - 4x_2 = 3$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3 \Rightarrow m = 15$. 6°. $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 40 \Rightarrow m = 12$.

I.4.20. $\frac{5m - 52}{2n + 1} = \frac{m - 4}{5n} = \frac{1}{5}$, rezultă $m = 11$ și $n = 7$.

I.4.21. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha}{\beta}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Rezultă în final $\frac{b^2}{ac} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\beta^2}$.

I.4.22. $x_1 + x_2 = \frac{m + 1}{m}$, $x_1 x_2 = \frac{1}{m}$.

1°. $E_1(m) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{(m + 1)^2}{m^2} - \frac{2}{m} = \frac{m^2 + 1}{m^2}$.

2°. $E_2(m) = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{(m + 1)^3}{m^3} - \frac{3(m + 1)}{m^2}$ etc.

3°. $E_3(m) = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - \frac{2}{m}\right]^2 - \frac{2}{m^2}$ etc.

4°. $E_4(m) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) =$

$$= (x_1 + x_2)\,\varepsilon\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \pm\frac{m+1}{m}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - \frac{4}{m}}$$ etc., unde $\varepsilon = \pm 1$.

5°. $E_5(m) = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}\right) =$

$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2x_2^2}$$ etc.

I.4.23. $S = x_1 + x_2 = \frac{4m}{m+6}$ și $x_1x_2 = \frac{m+1}{m+6}$. Se elimină m între cele două relații. De exemplu: din expresia produsului $m = \frac{1 - 6x_1x_2}{x_1x_2 - 1}$ și introducînd în expresia sumei obținem relația cerută.

I.4.24. a). $x_1 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow P = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$ adică

$$2m = m - 2 \Rightarrow m = -2, \left(x_1x_2 = \frac{-3 + i\sqrt{55}}{8}\cdot\frac{-3 - i\sqrt{55}}{8} = 1\right).$$

b). $x_1 = -x_2$, $S = x_1 + x_2 = 0$, $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow m = 1$.

c). $\Delta = 0$, $(m-1)^2 - 8m(m-2) = 0$, $m_{1,2} = \frac{7 \pm 2\sqrt{14}}{7}$.

I.4.25. $$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m}{m+1} \\ x_1x_2 = \dfrac{2}{m+1}. \end{cases}$$

Știind că $x_1 = 2x_2$ rezultă $$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{m}{m+1} \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{m+1}. \end{cases}$$

Se elimină x_2 între aceste două relații: $x_2 = \frac{m}{3(m+1)}$,

$2 \cdot \left(\frac{m}{3(m+1)}\right)^2 = \frac{2}{m+1}$. Rezolvînd această ecuație găsim valoarea lui m care răspunde la problema pusă.

1.4.26. 1°. $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

2°. $\Delta > 0 \Rightarrow m \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

3°. $\Delta < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

4°. $\Delta \geqslant 0$ și $P > 0 \Rightarrow m \in (2, +\infty) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right)$

5°. $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (2, +\infty)$.

6°. $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$.

7°. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (1, 2)$

8°. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \Phi$.

9°. Se înlocuiește $x = 0$ în ecuație, sau altfel: $P = 0$, $m = 2$.

10°. $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$.

1.4.27. $x_1 = 3x_2$, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$ și $x_1^2 + x_2^2 = 40$. Se elimină x_2 între relațiile ce dau suma și produsul obținînd $3p^2 - 16q = 0$, cu $p^2 - 2q = 40$ rezultă $q = 12$, $p = \pm 8$.

I.4.28. $x_1 - x_2 = 4$ şi $x_1^3 - x_2^3 = 208$, $x_1 - x_2 = \varepsilon\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$.

$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, unde $\varepsilon = \pm 1$.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 52 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta = 52 \\ \alpha^2 - 4\beta = 16 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm 8;\ \beta = 12.$$

I.4.29.

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, 0)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$m = 0$	+	$\vert$	$\vert$	Ecuaţia devine $-x - 1 = 0$
$m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$	+	−	+	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 > 0;$ $\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$
$m = \frac{1}{3}$	+	−	0	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = -x_2$
$m \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$	+	−	−	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 > 0,$ $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
$m = \frac{1}{2}$	+	0	−	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = 0;\ x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$m = 1$	0	+	−	$x_1 = x_2 = -1$
$m \in (1, +\infty)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0;\ x_2 < 0$

I.4.30.

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in \left(-\infty, -\frac{3}{7}\right)$	$-$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \notin R$
$m = -\frac{3}{7}$	$-$	$+$	0	$x_1, x_2 \notin R$
$m \in \left(-\frac{3}{7}, -\frac{3}{11}\right)$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \notin R$
$m = -\frac{3}{11}$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 > 0 \in R$
$m \in \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{5}\right)$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$
$m = -\frac{1}{5}$	$+$	|	|	Ecuația devine $8x - 3 = 0$
$m \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 > 0,$ $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
$m = 0$	$+$	0	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = 0,\ x_2 < 0$
$m \in (0, 3)$	$+$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$m = 3$	0	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = x_2 < 0$
$m \in (3, +\infty)$	$-$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \notin R$

I.4.31.

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, -1)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m = -1$	0	+	−	$x_1 = x_2 < 0$; $x_1, x_2 \in R$
$m \in (-1, 1)$	−	+	−	$x_1, x_2 \notin R$
$m = 1$	−	+	0	$x_1, x_2 \notin R$
$m \in (1, 2)$	−	+	+	$x_1, x_2 \notin R$
$m = 2$	0	+	+	$x_1 = x_2 > 0$ $x_1, x_2 \in R$
$m \in (2, 3)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m = 3$	+	0	+	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 = 0$, $x_2 > 0$
$m \in (3, +\infty)$	+	−	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 > 0, x_2 < 0$, $\lvert x_2\rvert > \lvert x_1\rvert$

I.4.32.

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, -1)$	−	+	−	$x_1, x_2 \notin R$
$m = -1$	−	+	0	$x_1, x_2 \notin R$
$m \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$	−	+	+	$x_1, x_2 \notin R$
$m = \frac{1}{2}$	0	+	+	$x_1 = x_2 > 0$; $x_1, x_2 \in R$
$m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m = 1$	0			Ecuația devine $0 = 4$, imposibilă
$m \in (1, +\infty)$	−	+	−	$x_1, x_2 \notin R$

I.4.33.

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, -1)$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \notin R$
$m = -1$	0	0	0	$x_1 = x_2 = 0$
$m \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 < 0,\ x_2 > 0;$ $\|x_1\| > \|x_2\|$
$m = \frac{1}{2}$	$+$	$\|$	$\|$	Ecuația devine $-2x + 1 = 0$
$m \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$
$m = 2$	0	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in R;\ x_1 = x_2 > 0$
$m \in (2, +\infty)$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \notin R$

I.4.34. În ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $x_1 - x_2 = \varepsilon \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ deci $m_1 = 11$, $m_2 = -1$, cu $\varepsilon = \pm 1$.

I.4.36. 1°. Fie α rădăcina comună $\Rightarrow \begin{cases} a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0 \\ a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0. \end{cases}$

Rezolvăm sistemul în raport cu α^2 și α.

$\alpha^2 = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$; $\alpha = -\frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$ cu condiția: $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$. Din

$$\left(-\frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right)^2 = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

rezultă $R = (a_1c_2 - c_1a_2)^2 - (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot (b_1c_2 - c_1b_2) = 0$.

R se numește rezultantul a două ecuații de gradul II.

2°. $\alpha = -\frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$.

3°. $a_1a_2(b_1c_2 - c_1b_2)y^2 - (c_1^2a_2^2 - a_1^2c_2^2)y + c_1c_2(a_1b_2 - b_1a_2) = 0.$

I.4.37. a) $m^3(13m + 154) = 0,\ m_1 = 0,\ m_2 = -\frac{154}{13}$.

b) $m_1 = 0,\ m_2 = -1,\ m_3 = \frac{1}{2},\ m_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$,

$m_5 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Pentru $m = 0$, ambele ecuații admit rădăcinile $x_{1,2} = \pm 1$.

I.4.38. $x_1^3 + x_2^3 < x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) < x_1x_2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]$.

Deci, în definitiv:

$$\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^3 - \frac{3(m+1)}{2m-1}\cdot\frac{2(m+1)}{2m-1} < \frac{m+1}{2m-1}\left[\frac{4(m+1)^2}{(2m-1)^2} - \frac{2(m+1)}{2m-1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(m+1)^3}{(2m-1)^3} - \frac{6(m+1)^2}{(2m-1)^2} - \frac{4(m+1)^3}{(2m-1)^3} + \frac{2(m+1)^2}{(2m-1)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+1)^2}{(2m-1)^2}\left[\frac{m+1}{2m-1} - 1\right] < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(2, +\infty\right).$$

I.4.39 $\alpha = -1$. Conform I.4.7. condițiile sînt:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (m-2)f(-1) > 0 \\ \frac{m-4}{2(m-2)} > -1. \end{cases}$$

Rezultă $m \in \left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}, 2\right) \cup \left(3, \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

I.4.40. Conform I.4.8. condițiile sînt: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ (m^2 - 1)f(1) < 0. \end{cases}$

Rezultă $m \in (-1,\ 1 - \sqrt{2}) \cup (1,\ 1 + \sqrt{2})$.

1.4.41. $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

1.4.42. $m \in \left(\frac{11 - \sqrt{89}}{2}, \quad 2\right) \cup \left(\frac{11 + \sqrt{89}}{2}; +\infty\right)$.

1.4.43. $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

1.4.44. $m \in \Phi$.

1.4.45. Se ordonează ecuația după x, se calculează Δ pe care îl ordonăm după m. Pentru ca rădăcinile să fie raționale trebuie ca Δ să fie pătrat perfect deci $\Delta_1 = 0$ (Δ_1 este discriminantul lui Δ). Regăsim condiția ca ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$ și $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ să aibă o rădăcină comună (vezi **1.4.36**).

1.4.46. Descompunem în produs de factori și avem: $(x - 1)[2(m - 1)x^2 - (m^2 - 2m + 5)x + 2(m - 1)] = 0$. Pentru ecuația de gradul doi, $\Delta = (m - 3)^2 (m + 1)^2 \geqslant 0$

m	Δ	P	S	Concluzii pentru ecuația de gr. II	Concluzii pentru ecuația de gr. III
$m \in (-\infty, 1)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R$ $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_2 = \frac{1}{x_1}$	Două rădăcini negative inverse, a treia egală cu 1.
$m = 1$	0	|	|	Ecuația devine: $4x(x - 1) = 0$	$x_1 = 0, x_2 = 1$
$m \in (1, 3)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in R$ $x_1 = \frac{1}{x_1} > 0$	Două rădăcini pozitive inverse, $x_3 = 1$
$m = 3$	0	+	+	$x_1, x_2 \in R$ $x_1 = x_2 = 1$	$x_1 = x_2 = x_3 = 1$
$m \in (3, +\infty)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in R x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$	$x_1 = \frac{1}{x_2}$ pozitive $x_3 = 1$

I.4.47. Ecuația se scrie $(x^6+1)+(m+1)(x^2+1)=0$ sau $(x^2+1)(x^4-x^2+m+2)=0$ deci ecuația admite rădăcinile $\pm i$. Discutăm ecuația bipătrată y^2-y+m+ $+2=0$, unde $y=x^2$.

m	Δ	P	S	Discuția ecuației în y	Discuția ecuației date în x
$m \in (-\infty, -2)$	+	−	+	$y_1, y_2 \in R$ $y_1 < 0$, $y_2 > 0$	$x_{1,2} = \pm i$; $x_{3,4} \notin R$; $x_5 = -x_6 \in R$
$m = -2$	+	0	+	$y_1, y_2 \in R$ $y_1 = 0$, $y_2 > 0$	$x_{1,2} = \pm i$; $x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = -x_6 \in R$
$m \in \left(-2, -\frac{7}{4}\right)$	+	+	+	$y_1, y_2 \in R$; $y_1 > 0$; $y_2 > 0$	$x_{1,2} = \pm i$; $x_{3,4,5,6} \in R$; $x_3 = -x_4$; $x_5 = -x_6$
$m = -\frac{7}{4}$	0	+	+	$y_1 = y_2 > 0$	$x_{1,2} = \pm i$; $x_3 = x_5$ și $x_4 = x_6$ (reale)
$m \in \left(-\frac{7}{4}, +\infty\right)$	−	+	+	$y_1, y_2 \notin R$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \notin R$

I.4.48. Este o ecuație reciprocă. Împărțind cu x^2 și grupînd obținem: $2m\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-(3m-8)\left(x+\frac{1}{x}\right)+$ $+2(m+2)=0$. Notînd $y=x+\frac{1}{x}$ obținem:

$2my^2-(3m-8)y-2m+4=0$; $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=x+\frac{1}{x}=$ $=\frac{2m-4}{m}$ sau $mx^2-2(m-2)x+m=0$ și $2x^2+x+2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}.$$

m	Δ	P	S	Natura și semnul rădăcinilor ecuației de gr. II	Natura și semnul rădăcinilor ecuației de gr. IV
$m \in (-\infty, 0)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_{3,4} \notin R$
$m = 0$	+	|	|	Ecuația devine: $4x = 0$	Ec. gr. III; $x_1 \in R$, $x_{3,4} \notin R$
$m \in (0, 1)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 < 0$, $x_2 < 0$	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 < 0$; $x_2 < 0$, $x_{3,4} \notin R$
$m = 1$	0	+	−	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 = x_2 < 0$	$x_1, x_2 \in R$; $x_1 = x_2 < 0$; $x_3, x_4 \notin R$
$m \in (1, 2)$	−	+	−	$x_1, x_2 \notin R$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \notin R$
$m = 2$	−	+	0	$x_1, x_2 \notin R$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \notin R$
$m \in (2 +\infty)$	−	+	+	$x_1, x_2 \notin R$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \notin R$

I.4.49. Pentru aflarea punctelor de intersecție se rezolvă sistemul format din $y = x^2 - 4x + 3$ și $y = x - 2$. Rezultă punctele:

$$A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \ B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(Vezi figura 51).

I.4.50. Sistemul nu admite soluție reală (vezi fig. 52).

I.4.51. Rezolvînd sistemul rezultă $x_1 = x_2 = 2$; $y_1 = y_2 = 4$. Deci dreapta este tangentă la parabolă (vezi fig. 53).

I.4.52. $A(1, -2)$; $B(-4, -17)$ (Vezi fig. 54).

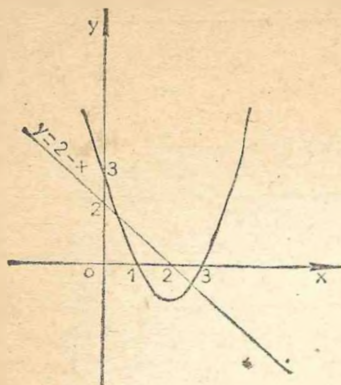


Fig. 51

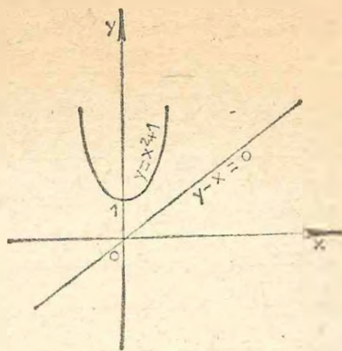


Fig. 52

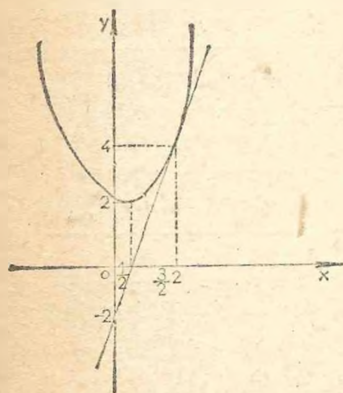


Fig. 53

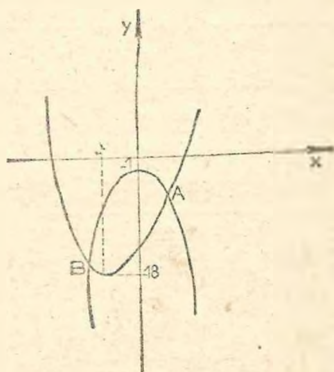


Fig. 54

I.4.53. (4, 6); (6, 4).

I.4.54. Conduce la rezolvarea următoarelor sisteme:

1) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,\ 0)$. 2) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{7},\ -\sqrt{7});\ (-\sqrt{7},\ \sqrt{7})$.

3) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{19}, \sqrt{19}); (-\sqrt{19}, -\sqrt{19}).$

4) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow (-2, 3); (3, -2); (-3, 2); (2, -3).$

I.4.56. (1, 2).

I.4.57. (4, 2); (—4, —2); (2, 4); (—2, —4).

I.4.58. (—1, 1, 3); (1, —1, —3);

I.4.59. $\begin{cases} x + y + z = ab \\ xy + yz + xz = a^2b \\ xyz = a^3. \end{cases}$

Sistemul este simetric și are soluția

$$\left(a, \frac{a(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b - 3})}{2}, \frac{a(b - 1 - \sqrt{b^2 - 2b - 3})}{2}\right).$$

I.4.60. (1, 1, 2); (2, 1, 1); (1, 2, 1).

I.4.61. Se ridică la pătrat ecuația a treia și rezultă soluțiile: (1, 2, 4); (2, 1, 4).

I.4.62. Se folosește proprietatea șirului de rapoarte egale pentru prima ecuație și se obțin soluțiile: (0, 0, 0);

$$\left(\frac{1}{-a + b + c}; \frac{1}{a - b + c}; \frac{1}{a + b - c}\right).$$

I.4.63. Adunînd și scăzînd cele două ecuații se obține

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy(x + y) = 6. \end{cases}$$

Notăm $x + y = s$; $xy = p$. Rezultă soluțiile (2, 1); (1, 2);

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, -1 + i\sqrt{3}\right); \left(-1 + i\sqrt{3}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right);$$

I.4.64. $x, y, z \neq 0$; $\frac{\sqrt[3]{a}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\frac{1}{y}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\frac{1}{z}}$; rezultă $x =$

$$= \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}};\ y = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{b}};\ z =$$

$$= \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c}}.$$

I.4.65. $x \in [-4, +\infty) \Rightarrow x = 45.$

I.4.66. $x \in [0\ +\infty) \Rightarrow x = 64.$

I.4.67. $x - 1 = \sqrt{25 - x^2}$; cu $25 - x^2 \geqslant 0$ rezultă $x = 4$; evident $x - 1 > 0$.

I.4.68. $x = 3$.

I.4.69. $x \in [5, +\infty)$; se ridică la pătrat ambii membri; $(x + 7)(x - 5) = 64$; $x = 9$.

I.4.70. $4x^2 + 20x = (16 - x)^2 \Rightarrow x = 4.$

I.4.71. Se ridică la pătrat ambii membri și după calcule $(2a - b)x - a^2bx^3 = 0$; $x = 0$; $\frac{1 + bx}{1 - bx} \geqslant 0$ și pentru ca ecuația să fie verificată de $x_{2,3} = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a - b}{b}}$ trebuie ca $\frac{a}{b} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

I.4.72. $2a - 3\sqrt[3]{x^2 - a^2}\,[\sqrt[3]{x + a} - \sqrt[3]{x - a}] = b^3.$

Dar $\sqrt[3]{x + a} - \sqrt[3]{x - a} = b$ deci $x = |a + b^3|\sqrt{\frac{8a - b^3}{27b^3}} =$

$$= \frac{|a + b^3|}{3b}\sqrt{\frac{8a - b^3}{3b}} \text{ cu } b^3 \in (0, 8a).$$

I.4.73. Se folosesc proprietățile proporțiilor; $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{10}{27}$.

I.4.74. $x = 3$.

I.4.75. $\sqrt[3]{1-3x} = \sqrt{1+x}$ se ridică la puterea a 6-a; $x = 0$.

I.4.76. $x_{1;2} = \pm 7$.

I.4.77. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Notăm $x = z^3$; rezultă $x = 8$.

I.4.78. $x = \frac{225}{289}$; se împarte prin $\sqrt[4]{1-x}$.

I.4.79. $\sqrt{1-x} = z$; transformăm radicalii dubli în sumă de radicali și $|z-2| + |z-3| = 1$ de unde $x_1 = 5$; $x_2 = 10$.

I.4.80. Se împarte prin $\sqrt[n]{x^2-1}$. Notăm $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = y \Rightarrow y^2 - 4y + 1 = 0$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$ de unde $\frac{x+1}{x-1} = (2 \pm \sqrt{3})^n$. Deci $x = \frac{(2 \pm \sqrt{3})^n + 1}{(2 \pm \sqrt{3})^n - 1}$.

I.4.81. $(\sqrt[3]{x+2} - 2\sqrt[3]{x-2})^2 = 0$ de unde $x = \frac{18}{7}$.

I.4.83. În ecuație se adună numitorii la numărători și se scad numărătorii din numitori, apoi se raționalizează obținînd $\frac{x+28}{x-28} = 8$. Rezultă $x = \pm 36$.

I.4.84. Se notează $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = z$ etc.

I.4.85. Se notează $\sqrt[4]{x} = u$ $\sqrt[5]{y} = v$; se obține sistemul

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 = 35. \end{cases}$$

I.4.86. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1. \\ \sqrt[4]{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 78 \end{cases}$

Notînd $\sqrt{x} + \sqrt{y} = u$, $\sqrt[4]{xy} = t$;

se obține $\begin{cases} u = 13 \\ t = 6 \end{cases}$ apoi, în final $\begin{cases} x_1 = 2^4 \\ y_1 = 3^4 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_2 = 3^4 \\ y_2 = 2^4. \end{cases}$

I.4.88. Se raționalizează numitorii din ecuația a doua și rezultă soluția: (9, 16).

I.4.89. $(0, 0)$; $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

I.4.90. $xy \geqslant 0$; $xz \geqslant 0$; $yz \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -5$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 7$ și sistemul devine:

$$\begin{cases} yz = (x+5)^2 \\ zx = (y-1)^2 \\ xy = (z-7)^2. \end{cases}$$

Înmulțim membru cu membru și rezultă $xyz = (x+5) \cdot (y-1)(z-7)$

$$\text{deci} \begin{cases} x = \dfrac{(y-1)(z-7)}{x+5} \\ y = \dfrac{(x+5)(z-7)}{y-1} \\ z = \dfrac{(x+5)(y-1)}{z-7} \end{cases}$$

Se ajunge la sistemul: $\begin{cases} 5x - 7y - z = -32 \\ -7x - y + 5z = 34 \\ -x + 5y - 7z = -44 \end{cases} \Rightarrow (1, 4, 9).$

I.5. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ. FUNCȚIA LOGARITMICĂ. ECUAȚII EXPONENȚIALE. ECUAȚII LOGARITMICE. SISTEME DE ECUAȚII EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE.

Exerciții de învățămînt programat

I.5.1. O funcție $f: R \to R_+$ dată de legea $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ se numește exponențială. Care din afirmațiile de mai jos sînt corecte?

a) Funcția exponențială este o bijecție a mulțimii numerelor reale pe mulțimea numerelor reale pozitive.

b) Funcția exponențială nu este surjectivă fiindcă nici o paralelă la axa absciselor, de forma $y = -b$ $(b > 0)$ nu intersectează graficul funcției, și deci funcția nu este bijectivă.

c) Funcția exponențială nefiind bijectivă nu admite inversă.

d) Funcția exponențială fiind bijectivă admite o inversă $\overset{-1}{f}: R_+ \to R$ dată de legea $\overset{-1}{f}(x) = \log_a x$, numită funcție logaritmică.

e) Graficul funcției exponențiale intersectează axa Ox în punctul de coordonate (1, 0) și nu intersectează axa Oy.

f) Graficul funcției exponențiale intersectează axa Oy în punctul de coordonate (0, 1) și nu intersectează axa Ox.

I.5.2. Pentru a rezolva ecuația exponențială $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$, procedăm astfel:

a) Notăm $2^x = y$ și ecuația se scrie $y^2 - 3y - 4 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 4$ și $y_2 = -1$. Deci $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ și $2^x = -1 \Rightarrow x \log_2 2 = \log_2(-1) \Rightarrow x = \log_2(-1)$;

b) Procedăm ca la punctul a) și $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$, $2^x = -1$ imposibil fiindcă funcția exponențială ia valori în R_+.

I.5.3. Pentru a rezolva ecuația: $0{,}5 \lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} = 1$ procedăm astfel:

a) Ecuația amplificată cu 2 devine $\lg(2x-1) + 2\lg\sqrt{x-9} = 2 \Leftrightarrow \lg(2x-1) + \lg(x-9) = 2$. (Am aplicat proprietatea $p \log_a A = \log_a A^p$, $A > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lg(2x-1)(x-9) = 2$

(Am aplicat proprietatea $\log_a A + \log_a B = \log_a AB$, $A > 0$, $B > 0$) $\Leftrightarrow (2x-1)(x-9) = 10^2$ (Am aplicat definiția logaritmului „logaritmul unui număr este puterea la care trebuie ridicată baza pentru a obține acel număr")
$\Rightarrow x_1 = 13$ și $x_2 = -\dfrac{7}{2}$.

b) Pentru existența logaritmilor impunem condiția ca $2x-1 > 0$ și $x-9 > 0$ (fiindcă logaritmul unui număr negativ nu există), deci $x \in (9, +\infty)$. În continuare, procedăm ca la punctul a). Deci singura rădăcină este $x = 13$ fiindcă $x = -\dfrac{7}{2} \notin (9, +\infty)$.

I.5.4. Pentru rezolvarea ecuației

$$\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$$

(A.S.E., București)

Procedăm astfel:

a) Pentru ca logaritmii să fie definiți impunem condițiile: $3+x > 0$ și $4-x > 0 \Rightarrow x \in (-3, 4)$. Folosim formula de transformare a bazei $\log_b N = \dfrac{\log_c N}{\log_c b}$; $b, c > 0$; $N > 0$; $b \neq 1$, $c \neq 1$, unde b este baza veche, iar c este baza nouă și transformăm toți logaritmii în baza 2: $\log_6(3+x) = \dfrac{\log_2(3+x)}{\log_2 6}$; $\log_{\frac{1}{4}}(4-x) = \dfrac{\log_2(4-x)}{\log_2 \frac{1}{4}} =$ $= \dfrac{\log_2(4-x)}{\log_2 1 - \log_2 4} = \dfrac{\log_2(4-x)}{-2}$; $\left(\log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4,\right.$ în

baza proprietății $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$, $a > 0$, $A > 0$, $B > 0$, $a \neq 1$, iar $\log_2 1 = 0$, logaritmul lui 1 în orice bază fiind 0, iar $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2$, logaritmul bazei fiind 1; $\log_a a = 1((\forall)\ a > 0)\ a \neq 1)$.

Introducînd în ecuație aceasta devine:

$\log_2 6 - \log_2(4 - x) = \log_2(3 + x) \Leftrightarrow \log_2(3 + x)(4 - x) = \log_2 6 \Leftrightarrow (3 + x)(4 - x) = 6$. (Rezultă în virtutea proprietății $A = B \Leftrightarrow \log A = \log B$, $A > 0$, $B > 0$). Rezolvînd ecuația obținem: $x_1 = -2$ și $x_2 = 3$, care aparțin domeniului de definiție găsit $(-3, 4)$.

b) Pentru ca membrul stîng să existe trebuie ca logaritmii să fie definiți (adică conform punctului a), $x \in (-3, 4)$) și $\log_6(3 + x) \neq 0$ fiindcă împărțirea prin 0 este o operație căreia nu-i atribuim nici un sens. Cum $\log_6(3 + x) \neq 0$ dacă $3 + x \neq 1$, rezultă că trebuie să excludem din $(-3, 4)$ punctul $x = -2$. Adică trebuie ca $x \in (-3, 4) - \{-2\}$, echivalent cu $x \in (-3, -2) \cup (-2, 4)$. În continuare procedăm ca la punctul a), obținînd valorile $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Dar $x_1 = -2 \notin (-3, -2) \cup (-2, 4)$, deci nu poate să fie rădăcină a ecuației. Rămîne ca rădăcină numai $x_2 = 3$.

I.5.5. Pentru a determina valorile lui x astfel ca expresia $(4 - x^2)^{x^2 + 7x - 20}$ să fie definită, vom pune condiția:

a) $x^2 + 7x - 20 > 0$

b) $4 - x^2 > 0$

c) $\begin{cases} x^2 + 7x - 20 > 0 \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$

I.5.6. Pentru a determina valorile lui x astfel ca expresia:

$(x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{16 - x^2}}$ să fie definită, vom pune condiția:

a) $16 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-4, 4]$

b) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, & x \in [-4, 2] \cup [3, 4] \\ 16 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x \in [-4, 2] \cup [3, 4] \\ 16 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

I.5.7. Pentru stabilirea domeniului maxim de definiție al funcției:

$f(x) = \log_{x-5}(x^2+1)$ procedăm astfel:

a) x^2+1 fiind pozitiv pentru orice x, vom pune doar condiția

$$x-5>0 \Rightarrow x \in (5, +\infty).$$

b) x^2+1 fiind pozitiv pentru orice x, vom pune doar condiția

$$x-5 \neq 1 \Rightarrow x \in R-\{6\}.$$

c) x^2+1 fiind pozitiv pentru orice x, vom pune condițiile:

$$\begin{cases} x-5>0 \\ x-5\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (5, +\infty)-\{6\}.$$

I.5.8. Pentru stabilirea domeniului maxim de definiție al funcției:

$f(x) = \log_{x+1}(4-x^2)$ va trebui ca:

a) $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1. \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$

b) $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, 2).$

c) $\begin{cases} 4-x^2\geqslant 0 \\ x+1\geqslant 0 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 0) \cup (0, 2].$

I.5.9. Pentru a determina mulțimea valorilor lui x pentru care: $\log_{0.5}(x^2-1)>0$ vom proceda astfel:

a) $x^2-1>1 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$

b) $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1<1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}).$

c) $\begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2-1>1 \end{cases} \Rightarrow x \in \Phi.$

I.5.10. Pentru a determina mulțimea valorilor lui x pentru care: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) < 0$ vom proceda astfel:

a) $x^2 - 1 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.

c) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \Phi$.

I.5.11. Pentru a determina mulțimea valorilor lui x pentru care: $\log_{\frac{3}{2}}(x^2 - 1) > 0$ vom proceda astfel:

a) $x^2 - 1 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

b) $\begin{cases} x^2 - 1 < 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.

c) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \Phi$.

I.5.12. Pentru a determina mulțimea valorilor lui x pentru care: $\log_2(x^2 - 1) < 0$ vom proceda astfel:

a) $x^2 - 1 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.

c) $\begin{cases} x^2 - 1 > 1 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \Phi$.

Exerciții și probleme propuse

Să se rezolve următoarele ecuații exponențiale:

I.5.13. $(a^x)^x = a^4$, $(a > 0)$.

I.5.14. $(b^{3-x})^{(2-x)} = 1$, $(b > 0)$.

I.5.15. $100 : 10^x = 1000^{\frac{5}{x}}$; $x \in R - \{0\}$.

I.5.16. $\left(\frac{4}{3}\right)^x = 0{,}75.$

I.5.17. $2^{x^2-3x+2} = 64.$

I.5.18. $8^x \cdot 2^{6x} = 4^{2x+10}.$

I.5.19. $\left(\frac{2}{3}\right)^{7x-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{11-3x}.$

I.5.20. $3^x + 4^x = 5^x.$

I.5.21. $\sqrt[1+\frac{1}{x}]{a^{5\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \sqrt[1-\frac{1}{x+2}]{a^{1+\frac{1}{x+2}}}$,

$\begin{pmatrix} x \in R - \{0, -2\} \\ a > 0 \end{pmatrix}.$

I.5.22. $2^x + 4^x = 272.$

I.5.23. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320.$

I.5.24. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810.$

I.5.25. $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257.$

I.5.26. $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 121.$

I.5.27. $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750.$

I.5.28. $3^x + 4^x + 5^x = 6^x.$

I.5.29. $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}.$

I.5.30. $(a^2 - b^2)^{2(x-1)} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$

I.5.31. $x^x - \frac{1}{x^x} = 3\left(1 + \frac{1}{x^x}\right)$; $(x > 0)$.

I.5.32. $3 \cdot 4^{x+2} = 4 \cdot 3^{\frac{2x+1}{x}}$.

I.5.33. $3^{2^{2^x}} = 43046721$.

I.5.34. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

I.5.35. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} = 0$.

I.5.36. $4^x + 6^x = 9^x$.

I.5.37. $\dfrac{1}{4^{\frac{1}{x}}} + \dfrac{1}{6^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{x}}}$; $x \neq 0$.

(A.S.E., București)

I.5.38. $\left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 194$.

(G.M.B., 1973)

I.5.39. $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}$.

(A.S.E., București)

I.5.40. $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62$.

(A.S.E., București)

I.5.41. $\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x + \left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x = 198$.

(G.M.B., 1974)

I.5.42. $a^{2x} - (a^{2c} + b^{2c})a^{x-c} \cdot b^{x-c} + b^{2x} = 0$.

(G.M.F.B., 1963)

I.5.43. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^x - \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^x = 1$.

(Matematika v școle)

I.5.44. $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$.

(A.S.E., București)

I.5.45. $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

(A.S.E., Bucureşti)

I.5.46. $9^x - 5^x - 4^x = 2\sqrt{20^x}$.

(Matematika v şcole, 1969)

I.5.47. $ma^{2x} + nb^{2x} = a^x b^x$.

(G.M.F.B., 1963)

Să se determine valorile lui x pentru care există următoarele funcţii:

I.5.48. $f(x) = \log_{x-2}(4x - x^2 - 3)$.

I.5.49. $f(x) = \log_{|x^2-3x-1|}(x + 1)(3 - x)$.

I.5.50. $f(x) = \lg(\sqrt{x-4} - 3)$.

I.5.51. $f(x) = \lg\sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

I.5.52. Să se determine $m \in R$ astfel ca funcţia: $f(x) = \log_3[x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4]$ să fie definită pentru orice x real.

I.5.53. Acelaşi enunţ pentru $f(x) = \lg[(3m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5m - 4]$.

I.5.54. Să se calculeze:

a) $\log_2 0{,}5$; b) $\log_{0.5} 2$; c) $\log_2 0{,}25$; d) $\lg 0{,}001$; e) $\log_2 \sqrt[3]{4}$; f) $\log_2 16\sqrt[5]{2}$; g) $\log_3 \frac{3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{81}}}$; h) $\log_a \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}}$, $a > 0$; $a \neq 1$.

I.5.55. Să se determine x din egalităţile:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$; b) $\lg x = -3$; c) $\log_{\frac{3}{4}} x = \frac{1}{2}$.

I.5.56. Să se determine baza x din egalităţile:

a) $\log_x 64 = 6$; b) $\log_x \frac{1}{8} = 3$; c) $\log_x 7 = 4$.

I.5.57. Cu ajutorul proprietăților logaritmilor să se dezvolte:

a) $\lg \frac{abc}{d}$; b) $\lg \frac{a^3 \cdot b^5}{\sqrt[7]{c}}$; c) $\lg \frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{ab\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 y}}}$.

d) $\lg \sqrt[5]{\frac{a^5 b^3 \sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{c^2 d}}}$. e) $\lg \frac{\sqrt[5]{a^3 b^2 x}}{\sqrt[3]{c^2 \sqrt[3]{y}}}$.

I.5.58. Să se restrîngă expresiile:

a) $\lg a + 5 \lg b - \frac{1}{3} \lg c$;

b) $\frac{1}{2} \log a - \frac{2}{3} \lg b + \frac{1}{3}\left[\lg d - \frac{1}{2} \lg c\right]$;

c) $\lg (a^2 + 2ab + b^2) - \frac{1}{2} \lg (a + b) + \frac{1}{3} \lg (a^2 + b^2)$.

I.5.59. Să se verifice egalitățile:

a) $\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg \frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{ca}{b}\right)^{\lg \frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg \frac{a}{b}} = 1$

b) $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\lg \frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{b^2}{ca}\right)^{\lg \frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\lg \frac{a}{b}} = 1.$

I.5.60. Să se arate că dacă $u_n = \lg \frac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)}$ atunci suma $s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \lg (n + a + 1)(n + b + 1)$ este independentă de n.

Să se calculeze sumele:

I.5.61. $S = \log_2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_2\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_2\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \log_2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

1.5.62. $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$; unde $u_n = \log_4 \dfrac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}$.

1.5.63. Să se calculeze $x = \dfrac{abc}{d}$ știind că $\lg a = 3{,}27300$; $\lg b = \bar{1}{,}99575$; $\lg c = \bar{1}{,}98494$; $\lg d = \bar{1}{,}59187$.

1.5.64. Să se calculeze puterile următoare:

a) 5^{10}; b) $(0{,}4326)^3$.

1.5.65. Să se calculeze: a) $\sqrt[3]{267}$; b) $\sqrt[5]{0{,}2}$; c) $\sqrt[10]{0{,}07152684}$.

1.5.66. Să se calculeze: a) $x = \sqrt[157]{\left(\dfrac{829}{828}\right)^{361}}$; b) $x = \left(\dfrac{2}{37}\right)^5$.

1.5.67. Care este volumul unei sfere cu $R = 0{,}7892$ m?

1.5.68. Să se calculeze raza unei sfere al cărei volum este

$$V = 0{,}199532 \text{ m}^3.$$

Să se rezolve următoarele ecuații logaritmice. Menționăm că cititorul trebuie de fiecare dată să stabilească mulțimea valorilor pentru care logaritmii sînt definiți. Se recomandă verificarea soluțiilor găsite.

1.5.69. $2 \lg x = 1 + \lg\left(x + \dfrac{11}{10}\right)$.

1.5.70. $\lg \sqrt[3]{7 - x^3} - \lg(3 - x) = 0$.

1.5.71. $\dfrac{1}{2}[\log_4(3x - 2) + 1] = \log_4[1 + \sqrt{10x - 11}]$.

1.5.72. $\lg(x + 1) - 2\lg(x - 1) = 1$.

1.5.73. $4 - \lg(2x^2 + 31x + 624) = 3 - \lg(x + 2)^2$.

1.5.74. $\log_x[2(x-1)^3+2(x-1)^2-3x+4]=3.$

1.5.75. $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\}=\frac{1}{2}.$

1.5.76. $\lg(3^x-6)+2\lg 3-\lg 3^x=\lg 7.$

1.5.77. $2\log_2(x-1)=9+\log_{\frac{1}{2}}(x-1).$

1.5.78. $\lg x^2=10+\lg\sqrt[3]{x}.$

1.5.79. $\log_5\{1+\log_4[1+\log_3(1+\log_2 x)]\}=0.$

1.5.80. $2\lg(7x-9)=2-\lg(3x-4)^2.$

1.5.81. $\log_x 2=\dfrac{\log_{4x}2}{\log_{2x}2}.$

1.5.82. $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$

(A.S.E., București)

1.5.83. $\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0.$

1.5.84. $\log_{16x}x^3+\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}=2.$

(A.S.E., București)

1.5.85. $2x-\lg(5^{2x}+4x-16)=\lg 4^x.$

1.5.86. $\sqrt{\log_a\sqrt[a^2]{ax}+\log_x\sqrt[a^2]{ax}}=a-$

$$-\sqrt{\log_a\sqrt[a^2]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[a^2]{\frac{a}{x}}}.$$

(I.P., Brașov)

1.5.87. $\log_3(3^x+1)-\log_3(1-3^{-2x})-2x+\frac{1}{2}\log_2 64=0.$

1.5.88. $\log_{x+1}(2x^3+2x^2-3x+1)=3.$

1.5.89. $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.

(A.S.E., București)

1.5.90. $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{\log_{\sqrt{5}} x}$.

1.5.91. $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1}}$

1.5.92. $\dfrac{1}{\log_6(3 + x)} + \dfrac{2\log_{\frac{1}{4}}(4 - x)}{\log_2(3 + x)} = 1.$

(A.S.E., București)

1.5.93.* Se consideră ecuația: $\dfrac{\lg x + \lg a}{\lg(x + \lambda)} = 2$ unde $\lambda \in R$ este un parametru și $a > 0$

a). Să se rezolve ecuația dată.

b). Să se discute natura rădăcinilor ecuației date.

(I.P., Iași, 1966. Enunț modificat.)

1.5.94.* Se dă $f(x) = \log_a x + \log_b x$.

a). Să se arate că $f(x) = \log_a x(1 + \log_b a) = \log_b x(1 +$  $\log_a b)$.

b). Să se studieze semnul funcției $f(x)$ în ipoteza

$$0 < a < 1 \text{ și } 1 < b.$$

1.5.95. Să se arate că relațiile:

$$y = 10^{\frac{1}{1 - \lg x}} \quad \text{și} \quad z = 10^{\frac{1}{1 - \lg y}}$$

implică relația $x = 10^{\frac{1}{1 - \lg z}}$.

1.5.96.* Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\lg\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = \lg\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{m}\right) + \lg \frac{m + 10}{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{10}}.$$

I.5.97.* Să se determine valorile parametrului $m \in R$ pentru care ecuația: $\dfrac{1 + \log_3(x-1)(x-27)}{1 + \dfrac{1}{m}\log_3(x-25)} = 2m$

admite rădăcini reale.

Să se rezolve:

I.5.98. $\log_x[\log_{36}(2 \cdot 9^{2x} - 3 : 4^{2x})] \leqslant 1.$

(I.P., București)

I.5.99. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)} > 1.$

(Facultatea de fizică, București)

I.5.100. $\log_5 x > \log_{125}(3x-2).$

I.5.101. $\log_m x + \log_{mx} x + \log_m x \cdot \log_{\frac{m}{x}} x > 0.$

(I.P., Brașov, 1971)

I.5.102. $\log_{2^x} x + \log_2 x > 0$

(I.P., București, 1971)

I.5.103. Se dă funcția: $f(x) = \log_{x^2-x-2} \sqrt[9-x^2]{9-x^2}$.
a). Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției.
b). Să se rezolve inegalitatea: $f(x) > 0$.

(Fac. matematică, București, 1968. Enunț parțial.)

Să se rezolve următoarele sisteme:

I.5.104. $2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2;\ 3^{\lg(2y-x)} = 1.$

I.5.105. $3^x \cdot 5^y = 10125;\ x + y = 7.$

I.5.106. $\sqrt{a^x} \cdot \sqrt[3]{a^y} = a^8;\ \sqrt[3]{b^x} \cdot \sqrt{b^y} = b^7.$

I.5.107. $8^x = 10y;\ 2^x = 5y.$

I.5.108. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \dfrac{65}{36};\ xy - x + y = 118.$

1.5.109. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+y} - \left(\frac{5}{2}\right)^{x+y} = \frac{29}{10}; \quad x + y - 3xy = 7.$

1.5.110. $\begin{cases} a^{\frac{x-y}{2}} - a^{\frac{x-y}{4}} = a^2 - a; \\ b^{\frac{x+y}{3}} - b^{\frac{x+y}{6}} = b^2 - b. \end{cases}$

$a, b \in (1, +\infty).$

(A.S.E., București)

1.5.111. $x + y = 65; \quad \lg x + \lg y = 3.$

1.5.112. $x^4 + y^4 = 641; \quad 2 \lg x + 2 \lg y = 2.$

1.5.113. $\lg x + \lg y = 3, \quad 5x^2 - 3y^2 = 11300.$

1.5.114. $\lg x + \lg y = \frac{3}{2}; \quad \lg x - \lg y = \frac{1}{2}.$

1.5.115. $x^3y^2 = a^{13}; \quad (\lg x)^2 + (\lg y)^2 = \frac{130}{9} (\lg a)^2.$

1.5.116. $2^{\lg x} : 3^{\lg y} = \sqrt{54}; \quad \lg x + \lg y = 2.$

1.5.117. $\log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2}; \quad \log_{b^2} x + \log_b y = \frac{3}{2}.$

1.5.118. $\log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9; \quad x + y = 5a.$

1.5.119. $\log_a x - \log_a y = 1; \quad \log_b x + \log_b y = 1.$

1.5.120. $\begin{cases} \log_3(\lg x + \lg y) - \log_9(\lg y) = 1 \\ \log_9(\lg x - \lg y) - \log_3(\lg y) = 0. \end{cases}$

(I.P., Brașov, 1970)

1.5.121. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$

(A.S.E., București)

I.5.122. $$\begin{cases} (\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 = 2m \\ x^{\log_a x} + y^{\log_a y} = 2 \cdot \dfrac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} \cdot a^m. \end{cases}$$

I.5.123. $$\begin{cases} \log_a x - \log_{a^3} y = m \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n. \end{cases} \qquad \begin{matrix} m, n \in R \\ a \in (0, 1) \cup (1, +\infty). \end{matrix}$$

(Institutul pedagogic, Cluj, 1970)

I.5.124. $$\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128} \\ \lg(x + y) + \lg(x - y) = \lg 40 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{matrix}$$

(A.S.E., București)

I.5.125. $$\begin{cases} \lg \sqrt[4]{x} + 2 \lg \sqrt[12]{y} = 0{,}25 + \lg \sqrt[6]{5}. \\ 3(\lg x - 1) - 2(\lg y - \lg 5) = 0. \end{cases}$$

(A.S.E., București)

I.5.126. $$\begin{cases} xy = a^2 \\ (\lg x)^2 + (\lg y)^2 = \dfrac{5}{2} (\lg a^2)^2. \end{cases} \qquad (x > 0, \; y > 0)$$

(A.S.E., București)

I.5.127. $$\begin{cases} x^p = y^q \\ p^x = q^y. \end{cases}$$

I.5.128. $$\begin{cases} (xa)^{\lg a} = (by)^{\lg b} \\ b^{\lg x} = a^{\lg y}. \end{cases}$$

I.5.129. $$\begin{cases} \log_m x + \log_n y = a \\ \log_n x + \log_m y = b. \end{cases}$$

I.5. SOLUŢII, INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

I.5.1. Afirmaţiile *a,d, f*, sînt adevărate; pentru afirmaţia de la punctul b) vezi soluţia de la exerciţiul **I.3.25,** care arată că paralela la axa absciselor trebuie dusă numai prin punctele mulţimii valorilor, deci în cazul nostru numai paralele de ecuaţie $y = b$ $(b > 0)$ fiindcă mulţimea valorilor este R_+. Este indicat să se construiască graficul funcţiei în cazurile $a > 1$ şi $a \in (0, 1)$.

I.5.2. Specificarea de la punctul b) este absolut necesară. La punctul a) s-a mai făcut o greşeală, fiindcă logaritmul unui număr negativ nu există şi acolo s-a scris $\log_2(-1)$. Deci b).

I.5.3. Corectă rezolvarea de la b) fiindcă $-\frac{7}{2}$ nu este rădăcină. Deci atenţie, totdeauna trebuie să aflăm mulţimea valorilor lui x pentru care logaritmul are sens (domeniul de definiţie). Este recomandabil ca soluţiile obţinute să fie verificate.

I.5.4. Corectă rezolvarea de la punctul b) fiindcă întreaga expresie trebuie să fie definită, adică trebuie găsite valorile lui x pentru care operaţiile indicate au sens. Deci primul lucru pe care trebuie să-l facem, cînd avem de rezolvat o ecuaţie logaritmică, este stabilirea mulţimii pentru care operaţiile indicate au sens, prin aceasta înţelegînd stabilirea domeniului de definiţie.

I.5.5. b) **I.5.6.** c). Baza trebuie să fie pozitivă iar radicalul să fie definit.

I.5.7. Baza este un număr real mai mare ca zero şi diferită de unitate, deci c).

I.5.8. Expresia de sub logaritm trebuie să fie mai mare ca zero iar baza mai mare ca zero şi diferită de unitate, deci a).

Pentru exerciţiile **I.5.9.** — **I.5.12.** recomandăm să se schiţeze graficul funcţiei logaritmice atunci cînd baza este subunitară şi respectiv supraunitară.

I.5.9. b); **I.5.10.** a);

I.5.11. Baza fiind supraunitară, a);

I.5.12. Baza fiind supraunitară, b).

I.5.13. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$. **I.5.14.** $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

I.5.15. $x_1 = 3$; $x_2 = -5$.

I.5.16. $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4}$ adică $x = -1$.

I.5.17. $x^2 - 3x + 2 = 6$; $x_1 = 4$; $x_2 = -1$.

I.5.18. $x = 4$. **I.5.19.** $x = -2$ **I.5.20.** $x = 2$.

I.5.21. $x = 2$; indicele radicalului nu este număr natural;

I.5.22. $2^x = y$; $y_1 = 16$, $y_2 = -17$; $2^x = 16$; $x = 4$; $2^x = -17$ imposibil.

I.5.23. $2^x = y \Rightarrow 4y^2 + 8y - 320 = 0 \Rightarrow x = 3$.

I.5.24. $3^{2x} \cdot 9 + 9 \cdot 3^x = 810 \Rightarrow x = 2$.

I.5.25. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

I.5.26. $3^{x-4}(3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) = 121$; $x = 4$.

I.5.27. $x = 5$. **I.5.28.** $x = 3$.

I.5.29. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow x = 3$.

I.5.30. Ecuația se mai poate scrie: $\frac{(a^2-b^2)^x}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^x}{a+b} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log(a-b)}{\log(a+b)}, \quad a > b > 0.$

I.5.31. $\frac{(x^x+1)(x^x-1)}{x^x} = \frac{3(x^x+1)}{x^x}$; $x_1 = 2.$

I.5.32. $x_1 = -1, \quad x_1 = \frac{\lg 3}{\lg 4}.$

I.5.33. Se descompune în factori primi membrul drept, $x = 2.$

I.5.34. $x = 0.$

I.5.35. $2^{2x-1}(1+2) = 3^{x-\frac{1}{2}}(1+3) \Rightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

I.5.36. Se împarte prin 9^x și notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$; $x =$

$= \frac{\lg 2 - \lg(-1+\sqrt{5})}{\lg 3 - \lg 2}.$

I.5.37. Se înmulțește cu $9^{\frac{1}{x}}$ și $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 =$

$= 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$

I.5.38. Notăm: $\left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = y$. Se obține ecuația $y^2 - 194y + 1 = 0.$

$\left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = (7 \pm 4\sqrt{3})^2 \Rightarrow x_1 = 10; \quad x_2 = -10.$

1.5.39. $2^x - 3^x = \sqrt{3^x(2^x - 3^x)}$; $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{1 - \log_2 3}$.

1.5.40. $4 - \sqrt{15} = \frac{1}{4 + \sqrt{15}}$. Notăm $(4 + \sqrt{15})^x = y$ deci $(4 - \sqrt{15})^x = \frac{1}{y}$.

$y_1 = (4 + \sqrt{15})^2$, $y_2 = (4 - \sqrt{15})^2 = \frac{1}{(4 + \sqrt{15})^2} = (4 + \sqrt{15})^{-2}$ deci $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

1.5.41. $\left(\sqrt{5\sqrt{2} + 7}\right)^x = y \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4$.

1.5.42. $a^{x-c}(a^{x+c} - b^{x+c}) + b^{x-c}(a^{x+c} - b^{x+c}) = 0$.

Dacă $a \neq b$, $x = \pm c$. Dacă $a = b$ ecuația devine identitate.

1.5.43. $x + 1 = -2z$ și deci $2^{2z} + 6^{2z+1} - \frac{6^{2z+1}}{2^z} - 1 = 0$; $2^{2z} - 1 + 6^{2z+1} - 3^{2z+1} \cdot 2^{z+1} = 0$ sau $(2^z - 1)(2^z + 1) + 3^{2z+1} \cdot 2^{z+1}(2^z - 1) = 0$.

$2^z + 1 + 6 \cdot 18^z > 0 \Rightarrow 2^z - 1 = 0 \Rightarrow z = 0$ deci: $x = -1$.

1.5.44. Împărțim prin $4^{\frac{1}{x}} \neq 0$. Notăm $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y$, obținem $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

1.5.45. $8^x \neq 0$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

1.5.46. Ecuația se scrie: $9^x = 5^x + 2\sqrt{4^x \cdot 5^x} + 4^x$, $(9^{\frac{x}{2}})^2 = (4^{\frac{x}{2}} + 5^{\frac{x}{2}})^2$ deci $9^{\frac{x}{2}} = 4^{\frac{x}{2}} + 5^{\frac{x}{2}}$. Prin reducere la absurd se demonstrează că ecuația are soluție unică, $\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$.

I.5.47. Împărțim prin $a^x b^x \neq 0$; $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$ cu condițiile $m > 0$; $n > 0$; $mn \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{\lg(1 \pm \sqrt{1 - 4mn}) - \lg 2m}{\lg a - \lg b}$.

I.5.48. $\begin{cases} x - 2 \neq 1 \\ x - 2 > 0 \\ 4x - x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x \in (2, +3). \end{cases}$

I.5.49. $\begin{cases} (x+1)(3-x) > 0 \\ 4x^2 - 3x - 1 > 0 \\ 4x^2 - 3x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{4}\right) \cup (1,$

$3) - \left\{\frac{3 - \sqrt{41}}{8}, \frac{3 + \sqrt{41}}{8}\right\}$.

I.5.50. $x - 4 > 9 \Rightarrow x \in (13, +\infty)$.

I.5.51. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

I.5.52. Trebuie ca $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4 > 0$ oricare ar fi $x \in R$ deci $\Delta \leqslant 0$ fiindcă $a = 1 > 0$, $m \in [2, +\infty)$.

I.5.53. $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ 3m + 1 > 0. \end{cases}$

I.5.54. Revine la a rezolva ecuații exponențiale simple.

f) $\log_2 16\sqrt[3]{2} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^x = 2^{4 + \frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{13}{3}} \Rightarrow x = \frac{13}{3}$.

I.5.55. a) $x = 2$; b) $x = 10^{-3}$; c) $x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

I.5.56. a) $x^6 = 2^6 \Rightarrow x = 2$; b) $x^3 = 2^{-3} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

c) $x^4 = 7 \Rightarrow 4\log_7 x = 1 \Rightarrow \log_7 x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[4]{7}$ sau direct $x^4 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[4]{7}$.

I.5.57. a) $\lg a + \lg b + \lg c - \lg d$; b) $3\lg a + 5\lg b - \frac{1}{7}\lg c$;

c) $\lg a - \lg b + \frac{1}{3}\lg a + \frac{1}{3}\lg b + \frac{1}{6}\lg x - \frac{1}{6}\lg x - \frac{1}{12}\lg y$ etc.

d) $\frac{1}{5}\left[5\lg a + 3\lg b + \frac{1}{3}\lg x - \frac{2}{7}\lg c - \frac{1}{7}\lg d\right]$ etc.

e) $\frac{1}{5}[3\lg a + 2\lg b + \lg x] - \frac{1}{3}\left[2\lg c + \frac{1}{3}\lg y\right]$ etc.

I.5.58. a) $\lg \frac{ab^5}{\sqrt[3]{c}}$; b) $\lg \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{d}}{\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[6]{c}}$;

c) $\lg \frac{(a+b)^2\sqrt[3]{a^2+b^2}}{\sqrt{a+b}}$.

I.5.59. Se logaritmează ambii membri în baza 10 și folosind proprietățile logaritmilor rezultă identitățile cerute.

I.5.60.
$$u_1 = \lg(a+1)(b+1) - \lg(a+2)(b+2)$$
$$u_2 = \lg(a+2)(b+2) - \lg(a+3)(b+3)$$
$$u_3 = \lg(a+3)(b+3) - \lg(a+4)(b+4)$$
$$u_4 = \lg(a+4)(b+4) - \lg(a+4+1)(b+4+1)$$
....
$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \lg(a+1)(b+1) - \lg(a+n+1)(b+n+1).$$

Deci: $S = \lg(a+1)(b+1)$.

I.5.61. $S = \log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log_2 \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = -\log_2 n.$

I.5.62. $S = \log_4 \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n+1)(n+3)}{1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot n(n+4)} =$

$= \log_4 \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{(n+1)}{n+4} = 1 + \log_4 \frac{n+1}{n+4}.$

I.5.63. $\lg x = 3{,}66182$ deci $x = 4590{,}1$.

I.5.64. a) $10 \lg 5 = 6{,}98970$ deci $5^{10} = 9765600$.

b) $3 \lg 0{,}4326 = \bar{2}{,}90827$ deci $(0{,}4326)^3 = 0{,}08096$.

I.5.65. a) $\lg \sqrt[3]{267} = \frac{1}{3} \lg 267 = 0{,}80884$ deci $\sqrt[3]{267} =$

$= 6{,}439285$.

b) $\lg \sqrt[5]{0{,}2} = \bar{1}{,}86021$ deci $\sqrt[5]{0{,}2} = 0{,}724783$.

c) $\lg \sqrt[10]{0{,}071522684} = \bar{1}{,}88545$ deci $\sqrt[10]{0{,}07152684} =$
$= 0{,}76815$.

I.5.66. a) $\lg x = \frac{361}{157} (\lg 829 - \lg 828) = 0{,}00119 \Rightarrow x =$

$= 1{,}002744$.

b) $\lg x = \bar{7}{,}66415 \Rightarrow x = 0{,}461477 \cdot 10^{-6}$.

I.5.67. $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \lg V = 0{,}31366 \Rightarrow V = 2{,}059 \text{m}^3$.

I.5.68. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \Rightarrow \lg R = \frac{1}{3} [\lg 3 + \lg V + \operatorname{colg} 4 +$

$+ \operatorname{colg} \pi] = \bar{1}{,}55931 \Rightarrow R = 0{,}3625$.

I.5.69. $x = 11$. **I.5.70.** $7 - x^3 = (3 - x)^3 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}$;

$x_2 = \frac{4}{3}$.

I.5.71. $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. **I.5.72.** $x = \frac{3}{2}$. **I.5.73.** $x = 8$.

I.5.74. $x = 4$.

I.5.75. $x = 2$. **I.5.76.** $x = 3$. **I.5.77.** Se transformă logaritmul din baza $\frac{1}{2}$ în baza $2 \Rightarrow x = 9$.

I.5.78. $x = 10^6$. **I.5.79.** $x = 1$. **I.5.80.** $x = 2$.

I.5.81. Se transformă logaritmii în baza 2 și $\log_2 x(\log_2 2 + \log_2 x) = 2 + \log_2 x \Rightarrow x_1 = 2^{\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$.

I.5.82. $\log_2 (9^{x-1} + 7) = \log_2 4\ (3^{x-1} + 1) \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = 4 \cdot 3^{x-1} + 4$. Se notează $3^{x-1} = y \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

I.5.83. $x > 0$; $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{10}$, $x \neq \frac{1}{100}$. Transformăm logaritmii în baza 10 și rezultă în final $x = 10^{\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}}$.

I.5.84. Se transformă logaritmii în baza x; $x_1 = 4$, $x_2 = 2^{\frac{8}{3}}$.

I.5.85. $\lg \frac{10^{2x}}{5^{2x} + 4x - 16} = \lg 4^x \Rightarrow x = 4$.

I.5.86. Dacă ecuația admite soluții, acestea sînt pozitive, diferite de 1. Ținînd seama de egalitatea $\log_a x \cdot \log_x a = 1$ ecuația devine $|\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = a^2 \sqrt{\log_a x}$. Explicităm modulele și vom avea: Dacă $a \in (1, \sqrt{2}) \Rightarrow x = a^{\frac{4}{a^4}} \in (1, a)$; dacă $a > \sqrt{2} \Rightarrow x = a^{\frac{a^4}{4}} > a$; dacă $a = \sqrt{2} \Rightarrow x = a$; dacă $a \in (0, 1)$ ecuația are două soluții: $x = a^{\frac{a^4}{4}} \in (0, a)$ și $x = a^{\frac{4}{a^4}} \in (0, 1)$.

I.5.87. $1 - 3^{-2x} > 0$; $\frac{3^x + 1}{3^{2x}(1 - 3^{-2x})} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = 2$.

I.5.88. $x = 3$. **I.5.89.** $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. **I.5.90.** $x = \frac{1}{5}$.

I.5.91. Ecuația se mai poate scrie $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = x$; logaritmăm în baza x, $x > 0$, $x \neq 1$ și vom avea:

$\log^2 x + 3\log x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{10}$; $x_2 = \frac{1}{100}$.

I.5.92. Se pun condițiile de existență $x \in (-3, 4) - \{-2\}$, se transformă logaritmii în baza 2 și rezultă $x = 3$.

I.5.93. a) Dacă există soluții atunci:

$$x_{1,2} = \frac{a - 2\lambda \pm \sqrt{a^2 - 4a\lambda}}{2}.$$

b) Pentru ca rădăcinile x_1 și x_2 să fie reale trebuie ca $a^2 - 4a\lambda \geqslant 0$ de unde: $\lambda \in \left(-\infty, \frac{a}{4}\right]$. Pentru ca o valoare a lui x să fie rădăcină a ecuației inițiale trebuie ca: $x > 0$ și $x + \lambda > 0$. Observăm că pentru $\lambda \in \left(-\infty, \frac{a}{4}\right] - \{0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 > 0$ și $x_2 > 0$. Dacă $\lambda = 0$, $x_1 = a$ și $x_2 = 0$, deci o singură soluție este acceptabilă. Calculăm suma: $x_{1,2} + \lambda =$ $= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a\lambda}}{2}$. Deci pentru $\lambda \in \left(0, \frac{a}{4}\right]$ ecuația inițială are două soluții, iar pentru $\lambda \in (-\infty, 0)$ ecuația are o singură soluție $x_1 = \frac{a - 2\lambda + \sqrt{a^2 - 4a\lambda}}{2}$.

I.5.94.

a) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b a \cdot \log_a x \Rightarrow f(x) = \log_a x(1 + \log_b a)$.

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x \cdot \log_a b \Rightarrow f(x) = \log_b x(1 + \log_a b)$.

b) Cum $0 < a < 1$ și $b > 1$ rezultă $ab > a$ și $ab < b$ adică $a < ab < b$.

Vom trece $\log_a x$ și $\log_b x$ în baza ab, și vom avea:

$f(x) = \log_{ab} x\,(2 + \log_b a + \log_a b) = \log_{ab} x \cdot \frac{(1 + \log_b a)^2}{\log_b a}$.

Cazul $ab < 1$. Pentru $x \in (0,1)$, $\log_{ab} x > 0$, $\log_b a < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < 0$, $ab = 1 \Rightarrow f(x) = 0$.

Cazul $ab > 1$. Pentru $x \in (0,1)$, $\log_{ab} x < 0$, $\log_b a < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > 0$.

Pentru $x \in (1, \infty)$, $\log_{ab} x > 0$, $\log a < 0 => f(x) < 0$.

I.5.95. Logaritmăm în baza 10 primele două relații și eliminăm pe $\lg y$.

I.5.96. Folosind proprietățile logaritmilor se ajunge la $10\left(x + \frac{1}{x}\right) = 10\,\frac{m+x}{x}$ sau $x^2 - x + (1-m) = 0$, $x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{4m-3}}{2}$. Pentru $m \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ se obțin rădăcini complexe; pentru $m = \frac{3}{4}$ se obțin rădăcini reale și egale; pentru $m \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ rădăcini reale și distincte.

I.5.97. Aplicînd proprietățile logaritmilor ecuația devine: $(x-1)(x-27) = 3^{2m-1}(x-25)^2$ deci $(x-1)\cdot(x-27) > 0$; $x > 25$. Condiția este $x \in (27, +\infty)$, $m \in \left(-\infty, \frac{\lg \frac{13}{4}}{\lg 3}\right) - \{0\}$.

I.5.98. *Cazul I.* $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \Rightarrow 2 \cdot 3^{4x} - 3 : 2^{4x} \geqslant 36$,

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

Cazul II. $x \in (1, \infty) \Rightarrow x \in \Phi$. Deci $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

I.5.99.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 3x + 1)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \Rightarrow \log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 3x + 1) < 0.$$

Întrucît baza logaritmului este subunitară, $x^2 - 3x + 1 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

1.5.100. $\log_5 x = \log_{125} x^3$ și ecuația se transformă în: $x^3 - 3x + 2 > 0$; $(x-1)^2 (x+2) > 0$ de unde $x \in (-2, +\infty)$ dar trebuie ca $x > 0$ și $x > \frac{2}{3}$ deci $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

1.5.101. Scriind logaritmii în baza m și folosind proprietățile acestora inecuația devine $\frac{2 \log_m x}{1 - \log_m^2 x} > 0$.

Pentru $0 < m < 1$

x	0		m		1		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
$\log_m x$		$+$	1	$+$	0	$-$		$-$	
$1 + \log_m x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 - \log_m x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{2 \log_m x}{(1 - \log_m x)(1 + \log_m x)}$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	

$$x \in (m, 1) \cup \left(\frac{1}{m}, +\infty\right).$$

Pentru $m > 1$

x	0		$\frac{1}{m}$		1		m		$+\infty$
$\log_m x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 + \log_m x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1 - \log_m x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2 \log_m x}{(1 - \log_m x)(1 + \log_m x)}$		$+$		$-$	0	$+$		$-$	

$$x \in \left(0, \frac{1}{m}\right) \cup (1, m).$$

I.5.102. Transformînd logaritmul în baza 2 și aplicînd proprietățile logaritmilor inecuația devine: $\frac{x+1}{x}\log_2 x > 0$.

x	0		1		$+\infty$
$\log_2 x$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x}\log_2 x$		$-$	0	$+$	

Deci $x \in (1, +\infty)$.

I.5.103. a) $f(x) = \frac{1}{9-x^2}\log_{x^2-x-2}(9-x^2)$. Deci pentru stabilirea domeniului maxim de definiție punem condițiile:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 \neq 1. \end{cases}$$

b) *Cazul I.* Dacă baza este subunitară, $f(x) > 0$ dacă

$$\begin{cases} 0 < x^2 - x - 2 < 1 \\ 0 < 9 - x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \Phi.$$

Cazul II. Dacă baza este supraunitară, $f(x) > 0$ dacă:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 1 \\ 9 - x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-2\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 2\sqrt{2}\right).$$

Deci, în final, $f(x) > 0$ dacă

$$x \in \left(-2\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 2\sqrt{2}\right).$$

1.5.104. $x = 9$; $y = 5$. **1.5.105.** $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \Rightarrow x = 4$; $y = 3$.

1.5.106. $x = 12$; $y = 6$. **1.5.107.** $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

1.5.108. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = t$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{1}{t} \Rightarrow x_1 = 12$; $y_1 = 10$; $x_2 = -10$; $y_2 = -12$.

1.5.109. $x_1 = 2$; $y_1 = -1$; $x_2 = -1$; $y_2 = 2$; $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{6}$; $y_3 = \frac{-3 - \sqrt{105}}{6}$; $x_4 = \frac{-3 - \sqrt{105}}{6}$; $y_4 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{6}$.

Sistemul este simetric.

1.5.110. Notăm $a^{\frac{x-y}{4}} = u$ și $b^{\frac{x+y}{6}} = v$

și sistemul devine $\begin{cases} u^2 - u = a^2 - a \\ v^2 - v = b^2 - b \end{cases}$

cu soluțiile $\begin{cases} u_1 = a \\ v_1 = b \end{cases}$ și $\begin{cases} u_2 = 1 - a \\ v_2 = 1 - b. \end{cases}$

Soluția care convine este $u = a$, $v = b$ de unde rezultă $x = 5$; $y = 1$.

1.5.111. $x = 40$; $y = 25$ sau $x = 25$; $y = 40$.

1.5.112. $x = 5$; $y = 2$ sau $x = 2$; $y = 5$.

1.5.113. $x = 50$; $y = 20$.

1.5.114. $x = 10$; $y = \sqrt{10}$.

1.5.115. Notăm $\lg x = u$; $\lg y = v$ și $\lg a = b$. Sistemul devine $3u + 2v = 13b$, $u^2 + v^2 = \frac{130}{9} b^2$. În final, $x = a^3 \sqrt[3]{a^2}$; $y = a$ și $x_2 = a^2 \sqrt[3]{a}$; $y_2 = a^2$.

I.5.116. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

de unde $\lg x = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{10}$, $y = 10\sqrt{10}$.

I.5.117. $x = \frac{a^2}{b}$, $y = \frac{b^2}{a}$.

I.5.118. $x_1 = \frac{9a}{2}$; $y_1 = \frac{a}{2}$; $x_2 = \frac{a}{2}$; $y_2 = \frac{9a}{2}$.

I.5.119. $x = \sqrt{ab}$; $y = \frac{\sqrt{ab}}{a}$.

I.5.120. Transformînd logaritmii în baza 9 sistemul devine:

$$\begin{cases} 2\log_9(\lg x + \lg y) - \log_9(\lg y) = 1 \\ \log_9(\lg x - \lg y) - 2\log_9(\lg y) = 0 \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} (\lg x + \lg y)^2 = 9\lg y \\ \lg x - \lg y = (\lg y)^2. \end{cases}$$

Notăm $\lg x = u$ și $\lg y = v$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $x = 100$, $y = 10$.

I.5.121. $x, y \in (0, +\infty) - \{1\}$. Transformăm logaritmii în baza x și sistemul devine:

$$\begin{cases} \log_x^2 y - 2\log_x y + 1 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_x y - 1)^2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3. \end{cases}$$

I.5.122. Notînd $x^{\log_a x} = u$ și $y^{\log_a y} = v$ sistemul devine:

$$\begin{cases} uv = a^{2m} \\ u + v = 2\,\frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} \cdot a^m, \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$u = \frac{p+q}{p-q} a^m \qquad u = \frac{p-q}{p+q} a^m$$
$$\text{sau}$$
$$v = \frac{p-q}{p+q} a^m \qquad v = \frac{p+q}{p-q} a^m ;$$

obținînd în final soluțiile:

$$x_1 = y_2 = a \pm \sqrt{\log_a \left(\frac{p+q}{p-q} \cdot a^m\right)}$$

$$x_2 = y_1 = a \pm \sqrt{\log_a \left(\frac{p-q}{p+q} \cdot a^m\right)},\ a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

fiind necesar ca $m > 0$, $p > q$ pentru ca logaritmii să existe și $m + \log_a \frac{p+q}{p-q} \geqslant 0$, $m - \log_a \frac{p+q}{p-q} \geqslant 0$ pentru ca radicalii să aibă sens.

1.5.123. În ipoteza $x > 0$, $y > 0$ sistemul devine:

$$\begin{cases} \log_a x - \log_a \sqrt{y} = m \\ \log_{a^2} x - \log_{a^2} \sqrt[3]{y^2} = n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} = a^m \\ \dfrac{x}{\sqrt[3]{y^2}} = a^{2n}. \end{cases}$$

1.5.124. Sistemul se poate scrie:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{10}} = 2^{\frac{7}{x}} \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{10} = \dfrac{7}{x} \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases} .$$

$$x = \pm 7, \quad y = \pm 3.$$

1.5.125. Sistemul se poate scrie:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\lg x + \frac{1}{6}\lg y = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\lg 5 \\ 3\lg x - 2\lg y = 3 - 2\lg 5 \end{cases}$$

$$\lg x = 1; x = 10;\ 4\lg y = 4\lg 5;\ y = 5.$$

1.5.126. Substituim $y = \frac{x}{a^2}$ în ecuația a doua, care astfel devine: $2\lg^2 x = \frac{3}{2}\lg^2 a^3 = 0 \Rightarrow x_1 = a^3;\ y_1 = \frac{1}{a};\ x_2 = \frac{1}{a};\ \ y_2 = a^3.$

1.5.127. $x = \left(\frac{\lg p}{\lg q}\right)^{\frac{q}{p-q}},\ y = \left(\frac{\lg q}{\lg p}\right)^{\frac{-p}{q-p}}.$

1.5.128. $x = \frac{1}{a};\ y = \frac{1}{b}.$

1.5.129. $\log_n x = \log_n m \cdot \log_m x$. Notăm $\log_n m = k$ și vom avea $\log_n x = k\log_m x$. Analog, pentru y sistemul devine:

$$\begin{cases} \log_m x + k\log_m y = a \\ k\log_m x + \log_m y = b \end{cases} \text{ de unde } \begin{aligned} x &= m^{\frac{a-bk}{1-k^2}} \\ y &= m^{\frac{b-ak}{1-k^2}} \end{aligned}$$

I.6. METODA INDUCȚIEI COMPLETE, ANALIZA COMBINATORIE. BINOMUL LUI NEWTON

Etapele de demonstrare a unei propoziții $P(n)$ prin inducție completă sînt:

Etapa I numită și etapa de verificare.

Etapa II în care se presupune că propoziția este adevărată pentru n și se studiază dacă este adevărată pentru $n+1$. Pentru o mai bună înțelegere a metodei recomandăm să se studieze soluțiile de la exercițiile I.6.1. și I.6.2. precum și exemplele date în manualul școlar.

În legătură cu analiza combinatorie, vom aminti doar anumite formule care sînt mai des utilizate

$n! = 1.2.3 \dots (n-1)\, n,\ n \in N$. Observăm că $n! = (n - 1)!\, n$ sau $n! = (n-2)!\,(n-1)\, n$;

$(2n)! = 1.2 \dots (n-1)\, n(n+1)(n+2) \dots (2n-1)n$. Prin convenție $0! = 1$.

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)(n-k+1),\ n, k \in N,\ n \geqslant k.$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} \text{ sau } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Formula combinărilor complementare este $C_n^k = C_n^{n-k}$. Evident $n,\ k \in N$ și $n \geqslant k$.

Binomul lui Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Formula termenului general este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Formula termenului general este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$.

Suma coeficienților binomului este $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

În legătură cu coeficienții binomului reproducem și triunghiul lui Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}
$$

....

în care numerele din primul rînd reprezintă coeficienții binomului ridicat la puterea 0, cei din rîndul al doilea coeficienții binomului ridicat la puterea întîia, cei din rîndul al treilea coeficienții binomului ridicat la puterea a doua ș.a.m.d. De exemplu: $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, coeficienții fiind luați din rîndul al șaptelea. Legea de formare a triunghiului este ușor de observat.

I.6. Exerciții și probleme propuse

Să se demonstreze prin inducție completă că următoarele afirmații sînt adevărate.

I.6.1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.

I.6.2. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

I.6.3. $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ pentru $n \in N^* - \{1\}$.

I.6.4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2 - 3k - 2} = \frac{n}{3n+1}$.

I.6.5. $\prod_{k=1}^{n} (4k - 2) = (n + 1)(n + 2) \ldots (n + n).$

(G.M.B., 1970.)

I.6.6. $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 5} + \frac{10}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2 + 1}{(2n - 1)(2n + 1)} =$

$= \frac{n(n + 3)}{2(2n + 1)}.$

I.6.7. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}.$

I.6.8. $1!\,1 + 2!\,2 + 3!\,3 + \ldots + n!\,n = (n + 1)! - 1.$

I.6.9. $\frac{1}{a + 1} + \frac{2}{a^2 + 1} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{a^{2^{n-1}} + 1} = \frac{1}{a - 1} -$

$- \frac{2^n}{a^{2^n} - 1}.$

I.6.10. $\frac{7}{(1 \cdot 6)^2} + \frac{17}{(6 \cdot 11)^2} + \ldots + \frac{10n - 3}{(5n - 4)(5n + 1)^2} =$

$= \frac{n(5n + 2)}{(5n + 1)^2}.$

I.6.11. $\frac{(k + 1)!}{1!} + \frac{(k + 2)!}{2!} + \ldots + \frac{(k + n)!}{n!} =$

$= \frac{(k + 1 + n)!}{n!\,(k + 1)} - k!.$

I.6.12. $\frac{7}{(1 \cdot 6)^2} + \frac{17}{(6 \cdot 11)^2} + \ldots + \frac{10n - 3}{[(5n - 4)(5n + 1)]^2} \leqslant$

$< \frac{1}{5}.$

I.6.13. Să se arate că pentru orice $n \geqslant 2$ avem $2\sqrt[n]{n!} \leqslant$ $\leqslant n + 1.$

(G.M.B., 1967

I.6.14. $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

(G.M.B., 1968)

I.6.15. $\frac{16}{9 \cdot 25} + \frac{24}{25 \cdot 49} + \frac{32}{49 \cdot 81} + \ldots +$

$+ \frac{8(n+1)}{[(2n+1)(2n+3)]^2} = \frac{4n(n+3)}{9(2n+3)^2}$.

(G.M.B., 1968)

I.6.16. În cîte moduri se pot schimba între ele literele cuvîntului *carte*?

I.6.17. În cîte moduri se pot așeza 8 persoane în jurul unei mese rotunde?

I.6.18. În jurul unei mese se așază 6 persoane: 3 bărbați și 3 femei. În cîte moduri se pot așeza astfel încît să nu fie alături doi bărbați sau două femei?

I.6.19. Se permută cifrele 1, 2, 3, 4, 5 în toate modurile posibile. Să se găsească, în sistemul zecimal, suma numerelor formate din aceste permutări.

I.6.20. Probabilitatea unui eveniment este dată prin raportul dintre numărul cazurilor favorabile producerii acelui eveniment și numărul cazurilor posibile. Care este probabilitatea ca aruncînd un zar să iasă fața cu numărul doi?

I.6.21. O urnă conține 8 bile albe și 5 bile negre. Se scot la întîmplare 4 bile. Care este probabilitatea ca 2 bile să fie albe și două bile să fie negre?

I.6.22. Într-o urnă sînt n bile. Care este probabilitatea de a scoate simultan un număr par sau impar de bile?

I.6.23. O urnă conține 10 bile albe și 5 bile negre. Se extrag la întîmplare 3 bile și se cere care este probabilitatea ca cele 3 bile extrase să aibă aceeași culoare, adică să fie toate albe sau toate negre?

Să se rezolve următoarele ecuații:

1.6.24. $A_x^6 - 24x\, C_x^4 = 11\, A_x^4.$

1.6.25. $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x},$

1.6.26. $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101.$

1.6.27. $\frac{1}{P_{x-1}} - \frac{1}{P_x} = \frac{(x-1)^3}{P_{x+1}}.$

1.6.28. $3C_m^x + 2C_{m-1}^{x+1} = C_m^{x+2} - 2C_{m-1}^x$ unde $m \in N.$

Să se rezolve sistemele:

1.6.29. $\frac{A_x^{y-3}}{A_x^{y-2}} = \frac{1}{8};\quad \frac{C_x^{y-3}}{C_x^{y-2}} = \frac{5}{8}.$

(A.S.E., București, 1971)

1.6.30. $C_{x+1}^{y+1} = \frac{8}{3}\, C_{x+1}^y = 12C_{x+1}^{y-1}.$

(A.S.E., 1971)

1.6.31. $\frac{C_{x+1}^{y+1}}{5} = \frac{C_{x+1}^y}{5} = \frac{C_{x+1}^{y-1}}{3}.$

1.6.32. $\begin{cases} x\, A_{x-1}^{y-1} \cdot P_{x-y} = 15P_{x-1} \\ 9 \cdot C_{x+1}^y = 16C_x^{y+1}. \end{cases}$

(Concurs, 1969)

Să se demonstreze că:

1.6.33. $(C_m^n)^2 = \frac{m+n}{m-n}\,(C_{m-1}^m)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2.$

1.6.34. $\sum_{i=3}^{m} C_i^2 C_i^3 = 10C_{m+1}^6 + 12C_{m+1}^5 + 3C_{m+1}^4.$

1.6.35. $\frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \ldots + C_n^3}{C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + \ldots + C_n^4} = \frac{C_{n+1}^4}{C_{x+5}^4}.$

I.6.36. $\left(\frac{C_m^p}{C_m^{p-1}}-\frac{C_{m+k}^{p+k}}{C_{m+k}^{p+k-1}}\right):\left(\frac{C_n^p}{C_n^{p-1}}-\frac{C_{n+k}^{p+k}}{C_{n+k}^{p+k-1}}\right)=\frac{m-p+1}{n-p+1}.$

I.6.37. Să se găsească al nouălea termen din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{12}$.

I.6.38. Să se găsească termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}-\frac{a}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ care conține pe x^{-1}.

I.6.39. În dezvoltarea $\left(\frac{1}{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{5n}$, unde $n \in N$ și $x \in (0, +\infty)$, să se afle termenul care nu-l conține pe x.

I.6.40. Să se găsească termenul independent de x din dezvoltarea binomială $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$.

I.6.41. Coeficientul termenului al treilea de la sfîrșitul dezvoltării binomului $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^n$ este egal cu 45. Să se afle termenul acestei dezvoltări care conține pe x la puterea întîi.

(A.S.E., București)

I.6.42. În dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ raportul dintre coeficientul termenului al 4-lea și coeficientul termenului al 6-lea este $\frac{5}{18}$. Să se determine termenul care nu conține pe x.

(A.S.E., București)

I.6.43. Să se determine x știind că suma ultimilor trei coeficienți ai binomului $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ este egală cu 22 și că suma dintre termenii de rang 3 și rang 5 este 135.

(A.S.E., București)

I.6.44. Se cere coeficientul lui x^k din dezvoltarea:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^5}\right)^{3n}.$$

I.6.45. Să se găsească coeficientul lui x^4 din dezvoltarea:

$$(1 + x - 2x^2)^5.$$

I.6.46. Să se găsească coeficientul lui x^8 în dezvoltarea

$$(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)^4.$$

I.6.47. Să se găsească trei coeficienți binomiali consecutivi astfel încît cel din mijloc să fie media aritmetică a celorlalți doi.

I.6.48. Dacă C_1, C_2, C_3, C_4 sînt patru coeficienți consecutivi din dezvoltarea binomului $(x + 1)^n$ există relația:

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{C_3}{C_3 + C_4} = \frac{2C_2}{C_2 + C_3}$$

I.6.49. Să se arate că numărul $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ este număr întreg.

I.6.50. Să se găsească suma pătratelor coeficienților binomului $(x + a)^n$.

I.6.51*. Să se demonstreze egalitatea:

$$C_n^0 \cdot C_n^p + C_m^1 \cdot C_n^{p+1} + C_n^{n-p} \cdot C_n^p = \frac{(2n)!}{(n-p)!\,(n+p)!}.$$

I.6.52*. Să se arate că

$$C_{p+r}^3 + C_{q-r}^1 + C_{p+r}^2 + C_{q-r}^2 \cdot C_{p+r}^1 + C_{q-r}^3 = C_{p+q}^3.$$

I.6.53. Să se arate că:

$$(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - (C_n^3) + \ldots + (-1)^n (C_n^n) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pentru } n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \text{ pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

I.6.54*. Să se arate că

$$1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

I.6.55. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} C_x^3 x^3 \cdot 2^{x-3} - C_x^4 x^4 2^{x-4} < 0 \\ C_x^5 2^{x-5} \cdot x^5 - C_x^4 x^4 2^{x-4} < 0. \end{cases}$$

b) Să se determine valorile lui x astfel încît al cincilea termen al dezvoltării binomului $(2 + x)^x$ să fie cel mai mare.

(I.P., București)

I.6.56. Să se arate că $\sum_{x=0}^{n} \frac{1}{(x!)^2[(n-x)!]^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^4}$.

I.6.57. Să se calculeze suma cuburilor primelor n numere impare.

I.6.58. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1)$.

I.6.59. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} (4k - 3)^3$.

I.6.60*. Să se arate că

$$(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + (C_4^2)^2 + \ldots + (C_n^2)^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n^2 - 2)}{60}.$$

(G.M.B. 1968)

I.6.61*. Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}(k+1)!k$.

(Matematika v școle, 1960)

I.6.62*. Să se calculeze suma:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = S_k.$$

(G.M.B., 1967)

I.6. INDICAȚII, SOLUȚII ȘI RĂSPUNSURI

I.6.1. *Etapa I*: verificarea. Pentru $n = 1$, $\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3}$; pentru $n = 2$, $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 2 + 3}{4 \cdot 3^2}$.

Etapa II. Presupunem că $P(n)$ este adevărată, adică $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n + 3}{4 \cdot 3^n}$. Să demonstrăm că $P(n + 1)$ este adevărată, adică $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \frac{n + 1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n + 5}{4 \cdot 3^{n+1}}$. Dar $P(n + 1)$: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \frac{n + 1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n + 3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n + 1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n + 5}{4 \cdot 3^{n+1}}$.

I.6.2. Se verifică ușor pentru $n = 1$. Se presupune adevărată relația: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$ și trebuie să se demonstreze că $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n + 1}{2n + 3}$. Dar $\frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n + 1}{2n + 3}$.

1.6.3. Se verifică ușor pentru $n = 2$. Înmulțim ambii membri cu $\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$ și $\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} > \frac{(2n+1)(2n+2)\cdot 4^n}{(n+1)^3}$ sau $\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} > \frac{4^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2}$. Dar $\frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2} =$ $= 1 + \frac{n}{2(n+1)^2} > 1$ și rezultă că $\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} > \frac{4^{n+1}}{n+2}$.

1.6.4. $n = 1$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Se arată că

$$\frac{n}{3n+1} + \frac{1}{9(n+1)^2 - 3(n+1) - 2} = \frac{n+1}{3n+4}.$$

1.6.5. Pentru $n = 1$, $4 \cdot 1 - 2 = 1 + 1$.

Presupunem că $\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = (n+1) \ldots (n+n)$.

$$[4(n+1) - 2] \prod_{k=1}^{n} (4k-2) = (4n+2)(n+1) \ldots (n+n) =$$
$$= (n+2) \ldots [(n+1) + (n-1)] \cdot (4n+2) = (n+2) \ldots$$
$$\ldots [(n+1) + (n-1)] \cdot [(n+1) + n] \cdot [(n+1) + (n+1)].$$

1.6.6. Verificarea este evidentă. Presupunem că relația din enunț este adevărată și va trebui să demonstrăm că

$$\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2+1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{2(2n+3)}.$$

Ținînd seama de enunț rămîne de arătat că

$$\frac{n(n+3)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{2(2n+3)},$$

relație care se verifică ușor.

I.6.7. Presupunînd relația din enunț adevărată, va trebui să demonstrăm că $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$.

Ținînd seama de ipoteză va trebui să demonstrăm egalitatea $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$, care se verifică ușor.

I.6.8. Presupunînd relația din enunț adevărată, va trebui să demonstrăm că: $1!\,1 + 2!\,2 + \dots + n!\,n + (n+1)!\,(n+1) = (n+2)! - 1$. Ținînd seama de relația din enunț revine să verificăm egalitatea:

$$(n+1)! - 1 + (n+1)!\,(n+1) = (n+2)! - 1,$$
$$(n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.$$

I.6.9. Pentru $n = 1 \Rightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-1}$, egalitate evidentă. Presupunem egalitatea din enunț adevărată și va trebui să demonstrăm că:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2+1} + \dots + \frac{2^n}{a^{2^n}+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

Deci relația este adevărată pentru orice $n \in N \cup \{0\}$.

I.6.11. Verificarea se face imediat. Să demonstrăm că:

$$\frac{(k+1)!}{1!} + \frac{(k+2)!}{2!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} + \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{(k+n+2)!}{(n+1)!(k+1)} - k!.$$

Presupunînd egalitatea din enunț adevărată trebuie să demonstrăm că: $\frac{(k+n+1)!}{n!\,(k+1)} + \frac{(k+n+1)!}{(n+1)!} =$

$= \frac{(k+n+2)!}{(n+1)!\,(k+1)}$;

I.6.12. Verificarea se face imediat. În final va trebui să demonstrăm că $\frac{(n+1)(5n+7)}{(5n+6)^2} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5(n+1)(5n+7) <$ $< (5n+6)^2$.

I.6.13. Inegalitatea din enunț se mai scrie $2^n(n!) < (n+$ $+1)^n$. Pentru $n = 2$, $2^2 \cdot 2 < 3^2$. Presupunem inegalitatea din enunț adevărată. Trebuie să demonstrăm că $2^{n+1}(n+1)! <$ $< (n+2)^{n+1}$. Dar $(n+2)^{n+1} = [(n+1)+1]^{n+1} = (n+1)^{n+1} +$ $+ C_{n+1}^1(n+1)^n + \ldots + 1 = 2(n+1)^{n+1} + \ldots + 1 > 2(n+$ $+1)^{n+1} = 2(n+1)^n \cdot (n+1) > 2^{n+1}(n!)(n+1) = 2^{n+1}(n+$ $+1)!$. Deci, în final $(n+2)^{n+1} > 2^{n+1}(n+1)!$.

I.6.14. Pentru $n = 1$ egalitatea este evidentă. Presupunînd relația din enunț adevărată va trebui să demonstrăm că:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}.$$

Ținînd seama de enunț rămîne să demonstrăm:

$$\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{(n+3)}{2(n+3)},$$

relație care este evidentă.

I.6.15. Verificarea este evidentă. Presupunînd relația din enunț adevărată rămîne să demonstrăm că:

$$\frac{16}{9\cdot 25} + \frac{24}{25\cdot 49} + \ldots + \frac{8(n+1)}{[(2n+1)(2n+3)]^2} +$$
$$+ \frac{8(n+2)}{[(2n+3)(2n+5)]^2} = \frac{4(n+1)(n+4)}{9(2n+5)^2}.$$

Sau, ținînd seama de ipoteză, revine la a demonstra că

$$\frac{4n(n+3)}{9(2n+3)^2} + \frac{8(n+2)}{[(2n+3)(2n+5)]^2} = \frac{4(n+1)(n+4)}{9(2n+5)^2}.$$

1.6.16. $P_5 = 5! = 120.$

1.6.17. Se presupune o persoană în locul fix și se vor permuta celelalte;

$$P_7 = 7!.$$

1.6.18. La o așezare a bărbaților, femeile se pot așeza în $P_3 = 3! = 6$ moduri. Dar cum bărbații se pot așeza în șase moduri pe locurile indicate, avem $6 \cdot 6 = 36$ posibilități de așezare. Analog, 36 de moduri de așezare schimbînd locurile bărbaților cu cele ale femeilor. În total 72 posibilități.

1.6.19. Cifra 1 arată zecile de mii în $P_4 = 24$ numere. La fel pentru celelalte numere. Deci suma zecilor de mii din numerele formate este $24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 10^4 = 360 \cdot \cdot 10^4$. Analog se găsește suma miilor, 360×10^3 etc. Suma tuturor numerelor formate este $360 \times 11111 = 3999960$.

1.6.20. $\frac{1}{6}$.

1.6.21. $\frac{A_8^2 \cdot A_5^2}{A_{13}^4}$.

1.6.22. O singură bilă se scoate în C_n^1 moduri, 3 bile în C_n^3 moduri, 2 bile în C_n^2 moduri, 4 bile în C_n^4 moduri etc. Știm că suma $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$ și reprezintă cazurile posibile. Deci

$$p_1 = \frac{C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots}{2^n - 1} \text{ și } p_2 = \frac{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots}{2^n - 1}.$$

Evident, $p_1 + p_2 = 1$.

1.6.23. $\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} + \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{26}{91}$.

I.6.24. Se ajunge la ecuația $x^2 - 10x + 9 = 0$. Deoarece $x \geqslant 6$, $x = 9$.

I.6.25. Vom exprima combinările cu ajutorul factorialelor şi ajungem la $1 - \frac{5 - x}{5} = \frac{(5 - x)(6 - x)}{5 \cdot 6}$. Întrucît $x \leqslant 6$, $x = 2$.

I.6.26. Se folosește formula combinărilor complementare; $C_n^k = C_n^{n-k}$, $x = 10$.

I.6.27. Revine la $x(x + 1) - (x + 1) = (x - 1)^3$; acceptabil $x = 3$.

I.6.28. $x = \frac{m - 6}{4}$ și ecuația nu admite soluții decît dacă $m = 4k + 2$, $k \in N - \{1\}$, $m \geqslant x + 2$.

I.6.29. $x = 12$, $y = 7$.

I.6.30. $C_n^k = \frac{n!}{(n - k)!\, k!} \Rightarrow x = 9$, $y = 2$.

I.6.31. După dezvoltarea aranjamentelor și combinărilor se obține sistemul $x - 2y = 0$, $3x - 8y = -6$; $x = 6$, $y = 3$.

I.6.32. Se vor exprima combinările prin factoriale și vom obține în final $x = 15$; $y = 7$.

I.6.34. Primul membru al identității se scrie $\frac{1}{12}\sum_{i=3}^{m} (i^5 - 4i^4 + 5i^3 - 2i^2)$ și se ține seama că $\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{m} i^3 = \left[\frac{m(m + 1)}{2}\right]^2$, $\sum_{i=1}^{m} i^4 = \frac{m(m + 1)(6m^3 + 9m^2 + m - 1)}{30}$ şi $\sum_{i=1}^{m} i^5 = \frac{m^2(m + 1^2)(2m^2 + 2m - 1)}{12}$. (vezi ex. I.6.62)

I.6.35. Ținem seama de relațiile: $\sum_{k=3}^{n} C_k^3 = C_{n+1}^4$ și $\sum_{k=4}^{n} C_k^4 = C_{n+1}^5$.

I.6.36. Se folosește $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $(n \geqslant m)$.

I.6.37. $T_9 = C_{12}^8 (x^2)^{12-8} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^8 = C_{12}^4 \cdot 2^8$.

I.6.38. $T_{k+1} = (-1)^k C_{18}^k \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}\right)^{18-k} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt[4]{x}}\right)^k$. Exponentul lui x este $\frac{18-k}{3} - \frac{k}{4}$. Egalînd acest exponent cu -1 obținem $k = 12$. Deci termenul cerut este $T_{13} = C_{18}^{12} \frac{1}{x} \cdot a^6$.

I.6.39. $T_{k+1} = C_{5n}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{5n-k} (\sqrt[4]{x})^k = C_{5n}^k x^{-5n+k+\frac{k}{4}}$.

Punînd condiția ca exponentul lui x să fie zero $\Rightarrow k = 4n$. Deci termenul care nu-l conține pe x este $T_{4n+1} = C_{5n}^{4n}$.

I.6.40. $(-1)^n \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$.

I.6.41. Coeficientul termenului al treilea de la sfîrșitul dezvoltării este C_n^{n-2} deci, din ecuația $C_n^{n-2} = 45$, rezultă $n = 10$. $T_{k+1} = C_{10}^k x^{\frac{17k-30}{21}}$. Egalînd exponentul lui x cu 1 se obține $k = 3$. Deci este vorba de termenul de rangul 4.

I.6.42. $T_{k+1} = C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} (\sqrt{x})^k$. Dar $\frac{C_n^3}{C_n^5} = \frac{5}{18} \Rightarrow n = 12$. Egalăm exponentul lui x cu zero și rezultă $k = 8$. Deci este vorba de T_9.

I.6.43. $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22$; $n = 6$.

$C_6^2 2^{2x} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} + C_6^4 2^x \cdot \frac{1}{2^{2x-2}} = 135$. În final, se aduce la forma $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$, $x = -1$, $x_2 = 2$.

I.6.44. $C_{3n}^k (x^4)^{3n-k} \left(\frac{1}{x^5}\right)^k = C_{3n}^k x^{12n-9k}$. Deci $12n - 9k = p$.

$k = \frac{1}{9}(12n - p)$; p trebuie să fie ales astfel ca $12n - k$ să fie divizibil prin 9.

I.6.45. Din dezvoltarea binomială $[(1 + x) - 2x^2]^5$ se consideră doar termenii care conțin x^4. Rezultă -15.

I.6.46. Din dezvoltarea $[(1 - 2x) + x^2(3 - 4x)]^4$ se consideră termenii care conțin pe x^8.

I.6.47. Coeficienții consecutivi sînt C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}. Deci trebuie ca $2\,C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$;

$$\frac{2(n!)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!},$$

se ajunge la ecuația $k^2 - nk + \frac{n^2 - n - 2}{4} = 0$, $k = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$. Expresia $n + 2$ trebuie să fie pătrat perfect. Dacă n este par, $n + 2 = 4p^2$ de unde $k = 2p^2 - 1 \pm p$. Dacă n este impar, $n + 2 = (2p + 1)^2$ deci $k_1 = 2p^2 + 3p$; $k_2 = 2p^2 + p - 1$.

I.6.48. $C_1 = C_n^k$; $C_2 = C_n^{k+1}$; $C_3 = C_n^{k+2}$; $C_4 = C_n^{k+4}$. Revine la a demonstra identitatea:

$$\frac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}} + \frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+2} + C_n^{n+3}} = \frac{2\,C_n^{k+1}}{C_n^{k+1} + C_n^{k+2}}$$

care rezultă imediat dezvoltînd combinările după formula factorialelor. Se recomandă să se calculeze fiecare termen separat.

I.6.49. $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!\,(n+1)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 : (n+1)}$.

Numărul $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ fiind coeficientul lui x^n din dezvoltarea $(x+1)^{2n}$ și întrucît $(2n)!$ se divide cu $n+1$, rezultă că numărul dat este întreg.

I.6.50. Se consideră identitatea $(x+a)^n(x+a)^n = (x+a)^{2n}$. Se vor egala coeficienții lui x^n din ambele părți și se va obține $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

I.6.51. Considerăm identitatea $(x+a)^n(x+a)^n = (x+a)^{2n}$. Vom calcula coeficientul lui x^{n+p} din ambele părți unde $p \leqslant n$. Vom avea $C_n^0\, C_n^p + C_n^1 C_n^{p-1} + \ldots + C_n^{n-p} \cdot C_n^p = \frac{(2n)!}{(n+p)!\,(n-p)!}$.

I.6.52. În identitatea $(1+x)^{p+r}(1+x)^{q-r} = (1+x)^{p+q}$, după dezvoltare, se egalează coeficientul lui x^3 din ambii membri.

I.6.53. Se folosesc dezvoltările $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$; $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$.

I.6.54. Pornim de la dezvoltarea $(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$ care mai poate fi scrisă: $\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2} x^2 + \frac{C_n^2}{3} x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} x^{n+1}$. Pentru $x = 1$ obținem:

$$1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

I.6.55. a) Sistemul se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x^3 \cdot C_x^3 \cdot 2^{x-4}\left(2 - \frac{x^2 - 3x}{4}\right) < 0 \\ x^4 \cdot C_x^4 \cdot 2^{x-5}\left(\frac{x^2 - 4x}{5} - 2\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 8 > 0 \\ x^2 - 4x - 10 < 0. \end{cases}$$

Singura soluție care să satisfacă ambele inegalități este $x = 5$, fiindcă $x \in N$ și $x \geq 5$.

b) Din forma termenului general $T_5 = C_x^4 2^{x-4} x^4$. Pentru ca acest termen să fie cel mai mare trebuie ca $T_5 > T_4$ și $T_5 > T_6$ adică $\begin{cases} C_x^3 \cdot x^3 \cdot 2^{x-3} - C_x^4 \cdot x^4 \cdot 2^{x-4} < 0 \\ C_x^5 \cdot x^5 \cdot 2^{x-5} - C_x^4 \cdot x^4 \cdot 2^{x-4} < 0, \end{cases}$ obținînd sistemul de la punctul a).

Deci $x = 5$.

I.6.56. $\sum_{x=0}^{n} \frac{1}{(x!)^2[(n-x)!]^2} = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \sum_{x=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(x!)^2[(n-x)!]^2} =$

$= \frac{1}{(n!)^2} \cdot \sum_{x=0}^{n} (C_n^x)^2 = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^4}$. (vezi I. 6.50)

I.6.57. $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 =$

$= 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - k = 2n^2(n+1)^2 -$
$- 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n = n^2(2n^2 - 1)$.

I.6.58. $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n = n^3$.

I.6.59. Vezi I.6.57. $S = n(16n^3 - 16n^2 - 2n + 3)$.

I.6.60. $(C_n^2)^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{(1 \cdot 2)^2} = \frac{n^2(n^2 - 2n + 1)}{4}$;

$\sum_{2}^{n} (C_n^2)^2 = \frac{1}{4}\left(\sum n^4 - 2\sum n^3 + \sum n^2\right)$. Iar din I.6.62;

$\sum n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

$\sum n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

I.6.61. Este evidentă egalitatea: $(k+1)!\,k = (k+2)! - (k+1)!\,2$ deci $2^{n-k}\cdot k(k+1)! = 2^{n-k}(k+2)! - 2^{n-k+1}(k+1)!$. Deci $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\cdot k(k+1)! = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}(k+2)! - \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k+1}(k+1)!$.

Dînd lui k valorile 1, 2, 3, ..., n și însumînd membru cu membru vom obține $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\cdot k\cdot(k+1)! = (n+2)! - 2^{n+1}$.

I.6.62. $(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = m^{k+1} + C_{k+1}^{1}m^{k} + \ldots + 1 - m^{k+1} = C_{k+1}^{1}m^{k} + C_{k+1}m^{k-1} + \ldots + 1$. Dînd lui m valorile 0, 1, ..., $n+1$, și adunînd membru cu membru obținem: $(n+1)^{k+1} = C_{k+1}^{1}S_{k} + C_{k+1}^{2}S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{1} + S_{1} + n + 1$ care este o relație de recurență între sumele puterilor numerelor naturale. Pentru $k=4$, $(n+1)^{5} = C_{5}^{1}S_{4} + C_{5}^{2}S_{3} + C_{5}^{3}S_{2} + \ldots + C_{5}^{1}S_{1} + n + 1$. $S_{1} = \frac{n(n+1)}{2}$;

$$S_{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad S_{3} = \frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4} \Rightarrow$$

$$S_{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^{2}+3n-1)}{30}.$$

I.7.1.* Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea:

$$\sqrt[3x-4]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}.$$

(Concurs, 1973)

I.7.2.* Pentru orice număr real x se consideră numărul:

$$E(x) = \sqrt{2x + 19 - 8\sqrt{2x+3}} + \sqrt{2x + 7 - 4\sqrt{2x+3}}.$$

a) Să se determine mulțimea $A = \{x \in R \mid E(x) \in R\}$.

b) Să se arate că există un interval $[a, b] \subset R$ în care $E(x)$ este constant.

(Concurs, 1973)

I.7.3.* Fie mulțimile: $A = \left\{\dfrac{x}{y} \;\middle|\; \begin{array}{l} x = 2k+1 \\ y = 2k-1 \end{array} \; k \in Z\right\}$;

$$B = \left\{\frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{array}{l} a = 2n-1 \\ b = 2n+1 \end{array} \; n \in N\right\}.$$

a) Să se arate că $B \subset A$.

b) Să se găsească mulțimea X astfel ca $B \cup X = A$.

c) Să se găsească condiția pentru $A = B$.

(G.M.B., 1972)

I.7.4.* Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b_1, \ldots, b_n$ numere pozitive date și $x_1, \ldots, x_n$ variabile pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x_k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k}\right)^2.$$

(G.M.B., 1965)

I.7.5.* Să se arate că dacă $1 \leqslant x \leqslant 2$ atunci:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

(Concurs, 1965)

I.7.6.* Să se arate că dacă $x^2+y^2+z^2=1$ atunci

$$-\sqrt{3}\leqslant x+y+z\leqslant\sqrt{3}.$$

(G.M.F.B., 1958)

I.7.7.* Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi atunci avem:

$$\frac{a^2}{-a+b+c}+\frac{b^2}{a-b+c}+\frac{c^2}{a+b-c}\geqslant a+b+c.$$

(G.M.B., 1967)

I.7.8. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$

I.7.9. Să se rezolve ecuația $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0.$

(A.S.E., 1970)

I.7.10. Să se rezolve ecuația:

$$(x^2+3x-1)^4-13x^2(x^2+3x-1)^2+36x^4=0.$$

(A.S.E., București, 1970)

I.7.11. Să se rezolve ecuația:

$$(2x^2+5x-4)^2-5x^2(2x^2+5x-4)+6x^4=0.$$

(A.S.E., București, 1971)

I.7.12. Să se elimine m între ecuațiile:

$$m^2x-my+a=0 \text{ și } my+x=0.$$

I.7.13. Să se elimine m între ecuațiile:

$$x=\frac{am}{1+m^4};\ y=\frac{am^3}{1+m^4}.$$

I.7.14. Să se elimine m între ecuațiile

$$x = \frac{m^2b + a}{1 + m^2}; \; y = \frac{m(a - b)}{1 + m^2}.$$

I.7.15.* Fie funcția $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Să se determine coeficienții a, b, c, d dacă sînt îndeplinite condițiile:

I. Dacă două valori x_0 și x_1 satisfac relația $x_0 \cdot x_1 = 1$, valorile corespunzătoare y_0, y_1 satisfac relația $y_0 + y_1 = 0$.

II. Funcția se anulează pentru $x = 1$.

III. Funcția ia valoarea 1 pentru $x = 0$.

(Bacalaureat, Montreal — enunț parțial)

I.7.16.* Să se determine x și y astfel încît $2^x + 3^y$ să fie multiplu de 5.

(R.M.F., 1950)

I.7.17.* Să se arate că nu există două fracții a căror sumă și produs să fie numere întregi.

(Matematika v scole, 1954)

I.7.18.* Între ce limite trebuie să varieze $m \in R$ pentru ca fiecare din ecuațiile $f(x) = x^2 - (m^2 - 1)\; x + m^2 - 1 = 0$ și $g(x) = (m^2 - 3)x^2 - 6x - m^2 + 1 = 0$ să aibă o rădăcină, și numai una singură, cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuații?

I.7.19.* Fie ecuațiile $x^2 + px + q = 0$ și $x^2 + px - q = 0$. Să se găsească valorile întregi pentru p și q astfel ca rădăcinile celor două ecuații să fie în același timp raționale.

I.7.20.* Să se demonstreze identitatea:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2 = 1.$$

(G.M.B., 1966)

I.7.21. Să se demonstreze că binomul $x^n - 1$ este divizibil prin $x^{2k} + x^k + 1$ pentru $n = 3k$ (k natural), iar binomul $x^n + 1$ se divide prin $x^{2k} - x^k + 1$ pentru $n = 3k$ (k natural).

(G.M.B., 1968)

I.7.22.* Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - 5(xy + xz - yz) + \\ + 29x - 33y - 34z + 103 = 0.$$

(G.M.B., 1968)

I.7.23.* Să se calculeze suma:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}} \quad \text{pentru } m = 40.$$

(G.M.B., 1974)

I.7.24.* Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x+2}{3}\right] = \dfrac{y-3}{2} \\ \left[\dfrac{y+1}{3}\right] = \dfrac{x+3}{2} \end{cases}$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

(G.M.B., 1972)

I.7.1. Din condițiile de existență a indicilor radicalilor avem:

$3x - 1 \in N^* - \{1\}$ de unde $x \in \left\{\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \dots\right\} = A.$

$8 - 3x \in N^* - \{1\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{6}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \dots\right\} = B.$

$5x \in N^* - \{1\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \dots\right\} = C.$

$x \in A \cap B \cap C = \{1, 2\}$. Pentru $x = 1$ membrul I al egalității nu este definit, deci $x = 2$.

$$\sqrt[5]{\sqrt[2]{(-2)^2}} = \sqrt[10]{4}.$$

I.7.2. a) $E(x) = \sqrt{(\sqrt{2x+3} - 4)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x+3} - 2)^2} =$

$$= |\sqrt{2x+3} - 4| + |\sqrt{2x+3} - 2|.$$

$$A = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

b) $|\sqrt{2x+3} - 4| =$

$$= \begin{cases} \sqrt{2x+3} - 4 & \text{dacă } \sqrt{2x+3} > 4 \text{ pentru } x \in \left(\frac{13}{2}, +\infty\right) \\ 0 & \text{dacă } \sqrt{2x+3} = 4 \text{ pentru } x = \frac{13}{2} \\ 4 - \sqrt{2x+3} & \text{dacă } \sqrt{2x+3} < 4 \text{ pentru } x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right) \end{cases}$$

$$|\sqrt{2x+3}-2| =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2x+3}-2 & \text{dacă } \sqrt{2x+3}>2 \text{ pentru } x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ 0 & \text{dacă } \sqrt{2x+3}=2 \text{ pentru } x = \frac{1}{2} \\ 2-\sqrt{2x+3} & \text{dacă } \sqrt{2x+3}<2 \text{ pentru } x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Pentru $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $E(x) = 6 - 2\sqrt{2x+3}$; pentru $x = \frac{1}{2}$, $E(x) = 2$; pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$, $E(x) = 2$; pentru $x = \frac{13}{2}$, $E(x) = 2$; pentru $x \in \left(\frac{13}{2}, +\infty\right)$, $E(x) = 2 \cdot \sqrt{2x+3} - 6$. Deci pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right]$ avem $E(x) = 2$.

1.7.3. a) $\frac{x}{y} = \frac{2k+1}{2k-1} = 1 - \frac{2}{1-2k}$ pentru $k \leqslant 0 \Rightarrow n = -k$ și $\frac{x}{y} = 1 - \frac{1}{1+2n}$. Avem $\frac{a}{b} = \frac{2n-1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{1+2n} \Rightarrow B \subset A$.

b) $B \subset A$ și $\complement_A A = \Phi$ avem.

$\complement_A(B \cup X) = \complement_A B \cap \complement_A X = \Phi \Rightarrow \complement_A X = B \Rightarrow \complement_A B = X$

deci

$$X = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; \begin{matrix} m = 2k+1 \\ n = 2k-1 \end{matrix} \; k \in N \right\}.$$

c) S-a demonstrat că $B \subset A$. Pentru a avea $A = B$ trebuie ca $A \subset B$ și aceasta are loc cînd $n = k$ adică $n \in Z$.

I.7.4. Se consideră inegalitățile evidente

$$A_1^2x^2 + 2A_1B_1x + B_1^2 \geqslant 0$$
$$A_2^2x^2 + 2A_2B_2x + B_2^2 \geqslant 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n^2x^2 + 2A_nB_nx + B_n^2 \geqslant 0$$

Însumăm membru cu membru:

$$x^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} A_kB_k + \sum_{k=1}^{n} B_k^2 \geqslant 0.$$

Se obține un trinom de gradul II pozitiv pentru orice x. Așadar, $\Delta \leqslant 0$ deci $\left(\sum_{k=1}^{n} A_kB_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} B_k^2$. Punem $A_k = \sqrt{a_kx_k}$, $B_k = \sqrt{\frac{b_k}{x_k}}$ și inegalitatea este cea cerută.

Se mai poate rezolva utilizînd inegalitatea Cauchy-Buniakovski.

I.7.5. Pentru $x \in [1, 2]$ avem $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1}$; $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = |1 - \sqrt{x-1}| = 1 - \sqrt{x-1}$. Deci $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2$.

I.7.6. Se consideră egalitatea: $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$. Se suprimă primii 3 termeni și obținem: $(x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2)$. Dar cum $x^2+y^2+z^2 = 1$ atunci $(x+y+z)^2 \leqslant 3$ sau $|x+y+z| \leqslant \sqrt{3}$.

Altă soluție: În inegalitatea Cauchy-Buniakovski se ia $a_k = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $b_k = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Deci $\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$ va deveni: $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n$ dacă $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$. Pentru acest exercițiu, $n = 3$.

I.7.7. Fie $x = \frac{-a+b+c}{2} > 0$, $y = \frac{a-b+c}{2} \geqslant 0$, $z = \frac{a+b-c}{2} > 0$.

Inegalitatea devine $\sum \frac{(y+z)^2}{2x} \geqslant 2(x+y+z)$. Dar din inegalitatea Cauchy-Buniakovski rezultă:

$$\left[\sum \frac{[y+z]^2}{2x}\right] \cdot \left[\sum x\right] \geqslant \left[\sum \frac{y+z}{2}\right]^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum (y+z)\right]^2 = 2 \cdot \left(\sum x\right)^2.$$

Simplificînd cu $\sum x$ se obține inegalitatea cerută.

I.7.8. $\sqrt{x} = z$; $\sqrt{1-z^2} - z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ de unde $\sqrt{1-z^2} = z + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$. Convine doar $x = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$.

I.7.9. $y = x^2 - x + 1$. Ecuația devine $y^4 - 10x^2y^2 + 9x^4 = 0$. Împărțind prin x^4, rezultă în final: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = x_4 = -1$, $x_5 = x_6 = 1$, $x_{7,8} = \pm i$.

I.7.10. Asemănător cu I.7.9. Notînd $x^2 + 3x - 1 = y$, rezultă $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{10}$; $x_{5,6} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{7,8} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

I.7.11. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{4}{5}$.

I.7.12. Scriem expresia lui m din a doua ecuație și o înlocuim în prima. Se obține $x^3 + xy^2 + ay^2 = 0$.

I.7.13. Se împart cele două ecuații membru cu membru și se obține m^2. Apoi se înmulțesc, membru cu membru, cele două ecuații etc. și rezultă $(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$.

I.7.14. Valoarea lui m^2 din prima ecuație se înlocuiește în a doua și se obține $m = \frac{y}{x - b}$. Înlocuind în prima ecuație se obține $(x - b)[(x - a)(x - b) + y^2] = 0$.

I.7.15. Punînd condițiile din enunț, funcția este $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

I.7.16. Un număr este divizibil cu 5 cînd cifra unităților este zero sau 5. Pentru $x = 4m$, 2^x se termină cu cifra 6, pentru $x = 4m + 1$, 2^x se termină cu cifra 2, pentru $x = 4m + 2$ ultima cifră a lui 2^x este 4, pentru $x = 4m + 3$, 2^x se termină cu cifra 8; pentru $y = 4k + 1$, 3^y se termină cu cifra 3, pentru $y = 4k + 2$, 3^y se termină cu cifra 9, pentru $y = 4k + 3$, 3^y se termină cu cifra 7. Observăm că avem posibilitățile $4 + 1 = 5$, $2 + 3 = 5$, $8 + 7 = 15$ și $6 + 9 = 15$ pentru ca numărul să fie multiplu de 5. Deci $2^x + 3^y = 2^{4m} + 3^{4k+2}$; $2^x + 3^y = 2^{4m+3} + 3^{4k+3}$, $2^x + 3^y = 2^{4m+1} + 3^{4k+1}$; $2^x + 3^y = 2^{4m+2} + 3^{4k}$, oricare ar fi $m, k \in N$.

I.7.17. Fie $\frac{a_1}{b_1}$ și $\frac{a_2}{b_2}$, $n, p \in Z$. Conform enunțului $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = n$, $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = p$. Cunoaștem suma și produsul, deci $x^2 - nx + p = 0$. Rădăcinile ecuației x_1 și x_2 fiind fracțiile $\frac{a_1}{b_1}$ și $\frac{a_2}{b_2}$, $x_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4p}}{2}$; $\sqrt{n^2 - 4p}$ întreg $\Rightarrow$ $\Rightarrow n^2 - 4p$ pătrat perfect deci $n \pm \sqrt{n^2 - 4p}$ este divizibil cu 2 și deci x_1 și x_2 sînt numere întregi. Așadar $\frac{a_1}{b_1}$ și $\frac{a_2}{b_2}$ sînt numere întregi, ceea ce contrazice ipoteza.

I.7.18. *Metoda I.* Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ și x_1', x_2' rădăcinile ecuației $g(x) = 0$. Trebuie să existe relația: $\frac{x_1 - x_1'}{x_1 - x_2'} \cdot \frac{x_2 - x_1'}{x_2 - x_2'} < 0$; $(1 - m^2)(6m^4 - 31m - 11) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in (-\infty, -\sqrt{5,5}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{5,5}, +\infty)$.

Metoda II. x_1, x_2 fiind rădăcinile lui $f(x) = 0$ rezultă că trebuie să avem $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$.

I.7.19. Trebuie ca discriminanții celor două ecuații să fie pătrate perfecte: $p^2 - 4q = n^2$ și $p^2 + 4q = m^2$, de unde $q = \frac{m^2 - n^2}{8}$ și $p^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$. Putem satisface ultima ecuație punînd $p = \alpha^2 + \beta^2$, $\frac{m+n}{2} = \alpha^2 - \beta^2$, $\frac{m-n}{2} = 2\alpha\beta$. Rezultă că $\frac{m^2 - n^2}{8} = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$ și deci $p =$
$= \alpha^2 + \beta^2$ și $q = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$ unde $\alpha, \beta \in N$.

Valorile lui x sînt respectiv $\beta(\alpha - \beta)$, $-\alpha(\alpha + \beta)$ și $-\beta(\alpha + \beta)$, $-\alpha(\alpha - \beta)$.

I.7.20. Considerăm identitatea:

$$(1 + \sqrt{2})^{2n} = 1 + \sqrt{2}\, C_{2n}^1 + 2\, C_{2n}^2 + \ldots + 2^k C_{2n}^{2k} + \sqrt{2} \cdot 2^k C_{2n}^{2k+1} + \ldots + 2^n = 1 + 2\, C_{2n}^2 + \ldots + 2^k C_{2n}^{2k} + \ldots + 2^n + \sqrt{2}(C_{2n}^1 + 2\, C_{2n}^3 + \ldots + 2^k C_{2n}^{2k+1} + \ldots + 2^{n-1} C_{2n}^{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} + \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot C_{2n}^{2k+1}.$$

Analog, $(1 - \sqrt{2})^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} - \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}$.

Înmulțim membru cu membru cele două relații și obținem:

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2.$$

I.7.21. $x^n - 1 = x^{3k} - 1 = (x^k)^3 - 1 = (x^k - 1)[(x^k)^2 + x^k + 1]$ deci $x^n - 1 = \mathcal{M}(x^{2k} + x^k + 1)$.

$$x^n + 1 = (x^k)^3 + 1 = (x^k + 1)[(x^k)^2 - x^k + 1] = \mathcal{M}(x^{2k} - x^k + 1).$$

I.7.22. Se ordonează ecuația după x iar realitatea rădăcinilor este dată de
$\Delta_1 = -11y^2 - 11z^2 - 10yz + 106y + 118z - 395 \geqslant 0$. Ordonăm în raport cu y și realitatea rădăcinilor acestei ecuații este dată de $\Delta_2 = -96z^2 - 768z - 1536 \geqslant 0$ adică $z^2 - 8z + 16 \leqslant 0$, verificată numai de numărul natural $z = 4$, care înlocuit în $\Delta_1 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 \leqslant 0$ dă $y = 3$. Înlocuind în ecuația dată $y = 3$ și $z = 4$ obținem $x = 1$. Deci soluția este: $x = 1$, $y = 3$, $z = 4$.

I.7.23. $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow 2n + \sqrt{4n^2 - 1} = x + y + 2\sqrt{xy} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2n \\ 4xy = 4n^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = n + \frac{1}{2}$, $y = n - \frac{1}{2}$ deci $\dfrac{1}{\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + \sqrt{n - \frac{1}{2}}} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n - \frac{1}{2}}.$$

Pentru $n = 1, 2, \ldots, k$ avem suma:

$$S_k = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \ldots + \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right) \text{ sau}$$

$$S_k = \sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k + 1} - 1\right).$$

$$S_{40} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{81} - 1\right) = 4\sqrt{2}.$$

I.7.24. Notînd $\left[\frac{x+2}{3}\right] = m$ și $\left[\frac{y+1}{3}\right] = n$, sistemul devine $\begin{cases} x = 2n - 3 \\ y = 2m + 3 \end{cases}$ cu condițiile $m \leqslant \frac{x+2}{3} < m + 1$, $n \leqslant \frac{y+1}{3} < n + 1$. (Vezi I.3.22 d.)

Dacă $x = 2n - 3$ și $y = 2m + 3$, atunci

(1) $3m - 2 \leqslant 2n - 3 < 3m + 1$ și

(2) $3n - 1 \leqslant 2m + 3 < 3n + 2$. Dacă $m = 2k$, $6k - 2 \leqslant \leqslant 2n - 3 < 6k + 1$; $\frac{6k+1}{2} \leqslant n < \frac{6k+4}{2}$; $3k + \frac{1}{2} \leqslant \leqslant n < 3k + 2$; $n = 3k + 1$. Înlocuind m cu $2k$ și $n = = 3k + 1$ în (2) obținem $9k + 2 \leqslant 4k + 3 < 9k + 5$. $-\frac{2}{5} < k \leqslant \frac{1}{5} \Rightarrow k = 0$, $m = 0$, $n = 1$ de unde $x = -1$, $y = 3$.

Dacă $m = 2k + 1 \Rightarrow 6k + 1 \leqslant 2n - 3 < 6k + 4 \Rightarrow \Rightarrow 3k + 2 \leqslant n < 3k + 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow n = 3k + 2$ și $n = 3k + + 3$. Înlocuind $m = 2k + 1$ și $n = 3k + 2$ în (2): $4k + 5 \leqslant \leqslant 4k \leqslant 9k + 8 \Rightarrow k = 0$, $x = 1 \Rightarrow m = 1$, $n = 2 \Rightarrow x = 1$, $y = 5$.

Înlocuind m cu $2k + 1$ și $n = 3k + 3$ în (2) $9k + 8 \leqslant \leqslant 4k + 5 < 9k + 11 \Rightarrow k = -1$ deci $m = -1$, $n = 0$, $x = = -3$, $y = 1$. Soluțiile sistemului sînt $x_1 = -3$, $y_1 = -1$, $x_2 = -1$, $y_2 = 3$, $x_3 = 1$, $y_3 = 5$.

II.1. FORMULE FUNDAMENTALE. IDENTITĂȚI

Formulele I. Relații de bază, exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele.

1°. Relațiile de bază:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \operatorname{cosec}\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

2°. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele. (vezi tabelul de la pag. 186).

Formulele II. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$	\	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	\	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	\	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	\	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2-1}$
$\sec\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$	\	$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	\

Notă: Se consideră + sau − în fața radicalului, după cum funcția are valori pozitive sau negative în cadranul respectiv.

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+$$
$$+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-$$
$$-\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta-\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-1}$$

Formulele III. Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi, funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi, exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiului α cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; Dacă $\alpha=\frac{x}{2}$, $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$; pentru $\alpha=\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$.

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\qquad \operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\qquad \operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$$

$\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;

$\cos 3\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)$;

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Formulele IV. Formule pentru transformarea unor sume și diferențe de funcții trigonometrice în produs, formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \sin\beta}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

Numere complexe scrise sub formă trigonometrică.

Numărul complex $z = a + bi$ unde $a, b \in R$ iar $i^2 = -1$ poate să fie reprezentat într-un plan prin punctul $M(a, b)$ (vezi fig. 55).

Mărimea vectorului $\overline{OM}$ o vom nota cu ρ sau $|z|$ și o numim modulul numărului complex:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Unghiul dintre axa Ox și vectorul OM îl numim argumentul numărului complex și îl vom nota $\arg z$ sau α

Există relațiile:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\ \alpha = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\ \alpha = \dfrac{b}{\rho}\end{array}\right| \Rightarrow a = \rho\cos\alpha \text{ și } b = \rho\sin\alpha$$

deci $z = a + bi = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Numărul $\bar{z} = a - bi = \rho(\cos\alpha - i\ \sin\alpha)$ se numește conjugatul numărului complex z.

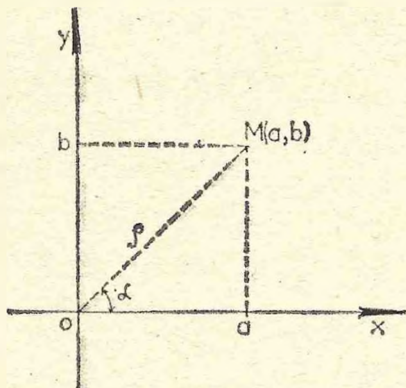


Fig. 55

Operații cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică:

Fie $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$.

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)].$$

Puterea unui număr complex $z = \rho(\cos\ \alpha + i\ \sin\alpha)$ este dată de formula:

$$z^n = \rho^n(\cos\ n\alpha + i\ \sin n\alpha).$$

Formula lui Moivre este:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex z este:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi + \alpha}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \alpha}{n}\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, n - 1$ și are n valori distincte.

Aplicațiile trigonometriei în geometrie.

Se notează cu a, b, c laturile BC, AC, AB ale unui triunghi ABC, aria triunghiului cu S, unghiul drept dintr-un triunghi dreptunghic cu A, raza cercului circumscris cu R, raza cercului înscris cu r, semiperimetrul cu p.

Într-un triunghi dreptunghic există relațiile:

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}; \quad \sin C = \cos B = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}; \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Într-un triunghi oarecare există relațiile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{(teorema sinusurilor).}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \text{(teorema cosinusurilor)}$$

și analogele prin permutări circulare.

$$\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \quad \text{(teorema tangentelor)}$$

și analogele prin permutări circulare.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}.$$

$S = \dfrac{bc \sin A}{2}$ și analogele prin permutări circulare.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formula lui Heron).

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

II.1. Exerciții și probleme

II.1.1. Să se transforme în grade sexagesimale, următoarele unghiuri exprimate în radiani:

a) $\alpha_1 = \dfrac{2\pi}{7}$;

b) $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{19}$;

c) $\alpha_3 = \dfrac{3\pi}{17}$.

II.1.2. Să se completeze următorul tabel care exprimă corespondența dintre cîteva unghiuri uzuale, în grade sexagesimale și radiani.

α exprimat în grade	30°			90°		135°				360°
α exprimat în radiani		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	

II.1.3. Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice ale următoarelor unghiuri:

a) 120°; b) 135°; c) 150°; d) 180°; f) 210°; g) 225°;

h) 240°; j) 270°; k) 300°; m) 330°; n) 315°; o) 360°.

Să se traseze graficele următoarelor funcții:

II.1.4. $f(x) = |\sin x|$.

II.1.5. $f(x) = |\cos x|$.

II.1.6. $f(x) = |\sin x| + \sin x$.

II.1.7. $f(x) = |\cos x| + \cos x$.

II.1.8. $f(x) = \sin x - |\sin x|$.

II.1.9. $f(x) = |\sin x| - \sin x$.

II.1.10. $f(x) = \cos x - |\cos x|$.

II.1.11. $f(x) = |\cos x| - \cos x$.

Aplicații ale formulelor I

II.1.12. Știind că $\sin x = -\frac{2}{3}$ și $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, să se calculeze $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$.

II.1.13. Dacă $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ și $\cos x = \frac{5}{7}$ să se calculeze $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

II.1.14. Dacă $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ și $\operatorname{tg} x = 3$, se cere să se calculeze $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$.

II.1.15. Dacă $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$, iar $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ să se calculeze $\sin x$, $\cos x$.

II.1.16. Dacă $\operatorname{cosec} x = \frac{a+b}{a-b}$, $0 < b < a$, se cere să se calculeze toate funcțiile trigonometrice ale unghiului x.

II.1.17. Știind că $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}$ să se calculeze în funcție de a și b expresia:

$$E = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

(Bacalaureat, Saint-Cyr)

Să se verifice următoarele identități pe domeniul de definiție al fiecărei expresii:

II.1.18. $\operatorname{tg} a = \frac{\sec a}{\operatorname{cosec} a}$.

II.1.19. $\sec a \pm \operatorname{cosec} a = \frac{\operatorname{tg} a \pm 1}{\sin a}$.

II.1.20. $\sin a + \cos a = \frac{1 + \operatorname{tg} a}{\sec a}$.

II.1.21. $\frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{\operatorname{tg} a + 1}{\operatorname{tg} a - 1} = \frac{1 + \operatorname{ctg} a}{1 - \operatorname{ctg} a}$.

II.1.22. $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a} = \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a$.

II.1.23. $(1 + \operatorname{tg} a)(1 + \operatorname{cotg} a) = \frac{(\sin a + \cos a)^2}{\sin a \cos a}$.

II.1.24. $(1 + \operatorname{tg} a)\cos^2 a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{1 - \operatorname{tg} a}$.

II.1.25. $\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = \frac{1 - 2\cos^2 a}{\sin a \cos a}$.

II.1.26. $\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1 - \cos^4 a}{\cos^2 a}$.

II.1.27. $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \frac{\operatorname{ctg} a}{\cos^2 a}$.

II.1.28. $\sin^2 a + \text{tg}^2 a = \sec^2 a - \cos^2 a.$

II.1.29. $(\sin a + \text{tg}\, a)(\cos a + \text{ctg}\, a) = (1 + \sin a)(1 + \cos a).$

II.1.30. $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

II.1.31. $\frac{\sin a + \cos a}{\cos a} = \sin a \sec a + 1.$

II.1.32. $\frac{\sin a + \text{ctg}\, a}{\text{tg}\, a + \text{cosec}\, a} = \sin a \; \text{ctg}\, a.$

II.1.33. $\frac{\text{tg}\, a + \text{ctg}^2 a}{\text{tg}\, a - \text{ctg}^2 a} = \frac{\text{tg}^3 a + 1}{\text{tg}^3 a - 1}.$

II.1.34. $\sin^2 a = \frac{\sin^4 a - \cos^2 a}{\sin^2 a - \text{ctg}^2 a}.$

II.1.35. $\text{tg}^2 a = \frac{\text{tg}^4 a + 1}{\text{tg}^2 a + \text{ctg}^2 a} = \frac{\text{tg}^4 a - 1}{\text{tg}^2 a - \text{ctg}^2 a}.$

II.1.36. $\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} = \frac{\text{cosec}\, a + 1}{\text{cosec}\, a - 1}.$

II.1.37. $\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}$ pentru $\text{tg}\, x > 0$.

II.1.38. Să se calculeze $E_1 = \cos^2 x - \sin^2 x$ și $E_2 = 2 \sin x \cdot \cos x$, în funcție de $\text{tg}\, x$.

Să se arate că următoarele expresii sînt independente de x:

II.1.39. $E_1 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x.$

II.1.40. $E_2 = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x).$

II.1.41. $E_3 = \sin^8 x + \cos^8 x + 6 \sin^4 x \cos^4 x + 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x).$

II.1.42. $E_4 = \sin^2 x \cos^2 x \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x(1 + \cos^2 x)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x(1 + \sin^2 x)}}\right].$

II.1.43.* $E_5 = \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}}{\sin x + \cos x}.$

Aplicații ale formulelor II

II.1.44. Să se calculeze $\sin \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12}$.

II.1.45. Să se calculeze sin 15°, cos 15°, tg 15°, ctg 15°.

II.1.46. Să se calculeze sin 75°, cos 75°, tg 75°, ctg 75°.

II.1.47. Să se calculeze sin 105°, cos 105°, tg 105°, ctg 105°.

Să se verifice identitățile:

II.1.48. $\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$

II.1.49. $\cos(a + b) \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b.$

II.1.50. $\frac{\sin(a + b) \sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b.$

II.1.51. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{4 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$

II.1.52. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}}.$

II.1.53. $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} a}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + a\right)$.

II.1.54. Dacă: $2 \operatorname{tg} a = 3 \operatorname{tg} b$ să se verifice că:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} b}{2 + 3 \operatorname{tg}^2 b}.$$

II.1.55. Două unghiuri ascuțite α, β au tangentele:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}.$$

Să se calculeze $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ și $(\alpha + \beta)$.

(Bacalaureat, Madagascar)

II.1.56. Fiind date $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ și $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ unde α și β sînt două unghiuri ascuțite, să se calculeze $\alpha - \beta$.

II.1.57. Se dă:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{4}{5}, \quad \alpha, \beta \text{ fiind unghiuri ascuțite.}$$

Să se calculeze $\alpha + \beta$.

II.1.58. Fiind date: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{8}$, să se calculeze $\alpha + \beta + \gamma$, α, β, γ fiind arce care au extremitatea în cadranul I.

II.1.59.* Fie $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{tg} \beta$ rădăcinile ecuației:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Să se calculeze în funcție de p și q valoarea expresiei:

$$E = \sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \cos^2(\alpha + \beta).$$

(Bacalaureat, Franța)

Să se arate că expresia:

II.1.60. $E = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \sin\alpha\sin(\alpha + \beta)}$ nu depinde de unghiul α.

II.1.61. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha - \beta)\cos\alpha\cos\beta}{1 - \cos^2\alpha}$$

este independentă de α și β.

II.1.62. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{[\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)]\,(\text{ctg}\,\alpha + \text{ctg}\,\beta)\,\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}$$

nu depinde de unghiul α.

Dacă $a + b + c = \pi$ să se verifice relațiile:

II.1.63. $\text{tg}\,a + \text{tg}\,b + \text{tg}\,c = \text{tg}\,a\ \text{tg}\,b\ \text{tg}\,c$ (relația lui Cagnoli).

II.1.64. $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c = 1.$

II.1.65. $\text{ctg}\,\dfrac{a}{2} + \text{ctg}\,\dfrac{b}{2} + \text{ctg}\,\dfrac{c}{2} = \text{ctg}\,\dfrac{a}{2}\,\text{ctg}\,\dfrac{b}{2}\,\text{ctg}\,\dfrac{c}{2}.$

II.1.66. $\text{tg}\,\dfrac{a}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{b}{2} + \text{tg}\,\dfrac{b}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2} + \text{tg}\,\dfrac{a}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2} = 1.$

II.1.67. Să se arate expresia:

$$E = \sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\left(60^\circ - \frac{a}{2}\right) + \sin^2\left(120^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

este independentă de a.

(Bacalaureat, Mexic)

II.1.68.* Să se arate că:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{2 \sin (a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)},$$

să se deducă $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$; $\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ$ și să se calculeze fără tabele expresia:

$$E = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ.$$

(Bacalaureat, Alger)

II.1.69. Să se calculeze: $\sin\left(\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{15}{17}\right)$.

II.1.70. Să se calculeze: $\cos\left[\arcsin \left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin \frac{4}{5}\right]$.

II.1.71. Să se arate că: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

II.1.72. Să se arate că: $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{5}\right) = 1$.

Să se demonstreze egalitățile:

II.1.73. $\arcsin \frac{12}{13} - \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{33}{65}$.

II.1.74. $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

II.1.75. $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$.

Aplicații ale formulelor III

Să se demonstreze:

II.1.76. $\sin 5a = 5 \sin a - 20 \sin^3 a + 16 \sin^5 a$.

II.1.77. $\cos 5a = 16 \cos^5 a + 5 \cos a - 20 \cos^3 a$.

II.1.78. $\sin 6a = 2 \sin a\,(16 \cos^5 a - 16 \cos^3 a + 3 \cos a)$.

II.1.79. Să se calculeze $\cos 4a$ în funcție de $\cos a$.

II.1.80. Unghiul $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

II.1.81. Știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Pe domeniul de definiție al expresiilor de mai jos, să se verifice identitățile:

II.1.82. $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \frac{2}{\sin 2a}$.

II.1.83. $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a}$.

II.1.84. $\operatorname{tg} 2a + \frac{1}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$.

II.1.85. $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a - b}{2}$.

II.1.86. $(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 4 \sin^2 \frac{a - b}{2}$.

II.1.87. $\sin 3a \operatorname{cosec} a - \cos 3a \sec a = 2$.

II.1.88. $(\sin x + \sin 2x)(2 \cos x - 1) = \sin 3x$.

II.1.89. $(\cos x + \cos 2x)(2 \cos x - 1) = \cos 3x + 1$.

II.1.90. $(1 + \cos x)(1 - 2 \cos x)^2 = \cos 3x + 1$.

II.1.91. Fie a, b două unghiuri ascuțite și $\operatorname{tg} a = \frac{1}{7}$; $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$.

Să se arate că

$$a + 2b = \frac{\pi}{4}.$$

II.1.92. Să se exprime $\operatorname{tg} 5x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$.

II.1.93. Fiind date două unghiuri ascuțite a și b astfel ca:

$\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$ și $\operatorname{tg} b = \frac{1}{239}$, să se arate că $4a - b = \frac{\pi}{4}$.

II.1.94. Fie a un unghi ascuțit, iar $\cos a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Să se calculeze $\cos 2a$. Care este valoarea unghiului a?

(Bacalaureat, Etiopia)

II.1.95. Se dă $\cos a = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, a fiind un arc cu extremitatea în cadranul II. Să se calculeze $\cos 2a$ și să se afle valoarea lui a.

II.1.96. Să se simplifice expresiile $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ și $\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

II.1.97. Să se calculeze și să se simplifice expresia

$$E = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{1+\cos\frac{\pi}{5}}}.$$

II.1.98. Fiind dat $\cos 4a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, să se calculeze $\cos 2a$ și $\cos a$.

II.1.99. Să se verifice relația:

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

II.1.100. Să se arate că expresia:

$$E = \cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a \cos 2b$$

are o valoare constantă.

II.1.101. Să se exprime $E = \sqrt{\dfrac{5 + 3\sin x + 4\cos x}{2 - 2\cos x}}$ în funcție de $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

(Bacalaureat, Egipt)

II.1.102. Să se calculeze în funcție de $u = \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$ expresia

$$E = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2(1 + \sin a)}}.$$

II.1.103. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \dfrac{\cos x \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \sin x}}$$ nu depinde de x.

II.1.104.* Știind că $\operatorname{tg} x = \dfrac{m}{n}$ să se calculeze expresia:

$$E = m \sin 2x + n \cos 2x.$$

II.1.105. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}}{\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x)}}$$ nu depinde de x.

Să se transforme în produs expresiile următoare:

II.1.106. $\sin 105° + \sin 75°$.

II.1.107. $\cos 75° + \cos 15°$.

II.1.108. $\sin 116° - \sin 12°$.

II.1.109. $\cos 135° - \cos 45°$.

II.1.110. $\sin 240° + \sin 120°$.

Să se verifice identitățile:

II.1.111. $\dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x$

II.1.112. $\dfrac{\cos 3x - \cos x}{\cos 3x + \cos x} = 1 - \sec 2x$

II.1.113. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x +$
$+ \cos 6x = 6 \cos x \cos 2x \cos 3x$.

Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

II.1.114. $E_1 = 1 \pm \sin 2x$.

II.1.115. $E_2 = 1 \pm \cos 2x$.

II.1.116. $E_3 = \dfrac{1 \pm \sin 2x}{1 \pm \cos 2x}$.

II.1.117. $E_4 = 1 \pm \operatorname{tg} x$.

II.1.118. Fie relațiile:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin(A + B)} = m \quad \text{și} \quad \frac{\cos A - \cos B}{\sin(A - B)} = n$$

unde m și n sînt două numere date. Să se calculeze în funcție de m și n următoarele expresii:

a) $\sin\frac{A+B}{2}$; b) $\cos\frac{A+B}{2}$; c) $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$;

d) $\sin\frac{A-B}{2}$; e) $\cos\frac{A-B}{2}$; f) $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$.

II.1.119. Să se arate că: $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$.

II.1.120. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x}.$$

II.1.121. Să se arate că dacă

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

atunci

$$\sin 2x = \frac{\sin 2a + \sin 2b}{1 + \sin 2a \sin 2b}.$$

Să se transforme în produs expresiile:

II.1.122. $E_1 = \sin x + \sin 5x$.

II.1.123. $E_2 = \sin x + \sin 3x + \sin 5x$.

Să se simplifice fracțiile:

II.1.124. $F_1 = \dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

II.1.125. $F_2 = \dfrac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x}$.

(Bacalaureat, New York)

II.1.126. $F_3 = \dfrac{1 + \cos 4x}{\sin 3x - \sin x}$.

II.1.127. $F_4 = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}$.

II.1.128. Știind că $a + b + c = \pi$, să se simplifice expresia

$$E = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c.$$

(A.S.E., București)

II.1.129. Să se pună sub formă de produs expresia:

$$E = a^2 + b^2 - 2ab \cos x, \quad (a \neq b).$$

(A.S.E., București)

II.1.130. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{\sin (x + a) \cos x - \sin x \cos (x + a)}{\cos (x + a) \cos x + \sin (x + a) \sin x}.$$

II.1.131. Să se transforme în produs expresia:

$$E = m + n \operatorname{tg} x.$$

II.1.132. Știind că $\sin a + \cos a = t$, să se calculeze expresia $E = \sin^3 a + \cos^3 a$ în funcție de t.

II.1.133. Să se pună sub formă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = \sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

II.1.134. Să se transforme $E = 1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2}$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

II.1.135. Să se transforme $E = \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 3x$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

Exerciții diverse

II.1.136. Se cere să se calculeze în funcție de a expresia $E = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ unde $a = \sin x + \cos x$.

Să se elimine x din relațiile:

II.1.137. $\begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \sin^3 x + \cos^3 x = b. \end{cases}$

II.1.138. $\begin{cases} \cos x \cos 2x = a \\ \sin x \sin 2x = b. \end{cases}$

II.1.139. $\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = a \\ \sin^6 x + \cos^6 x = b. \end{cases}$

II.1.140. $\begin{cases} a \sin x - b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \dfrac{\cos^2 x}{u^2} + \dfrac{\sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}. \end{cases}$

II.1.141. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x} = a \\ \dfrac{\sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x} = b. \end{cases}$

II.1.142. $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x} = a \\ \dfrac{\cos 2x}{\cos 2x + \sin 2x} = b. \end{cases}$

II.1.143. $\begin{cases} \operatorname{cosec} x - \sin x = a \\ \sec x - \cos x = b. \end{cases}$

II.1.144. $\begin{cases} \sin x - \cos x = a \\ \sin^3 x - \cos^3 x = b. \end{cases}$

II.1.145. Să se elimine a și b din sistemul:

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin b = m \\ x \sin b - y \cos a = n \\ (x^2 + y^2)(\sin^2 a + \cos^2 b) = 2\,mn. \end{cases}$$

(A.S.E., București, 1970)

II.1.146. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{2\cos^2 x + 4\sin x \cos x + \cos x + \sin x + 1}{4\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos x + 3\sin x - 3}.$$

II.1.147. Să se arate că expresia

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)\ (1 - \cos x)}{\sin x \cos x}$$

nu depinde de x.

(Admitere, Tokio, GMB, 1967)

II.1.148. Dacă

$$\cos x + \cos y = a$$
$$\sin x + \sin y = b$$

atunci:

a) $\sin(x + y) = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$;

b) $\sin(x - y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)\ (4 - a^2 - b^2)}$.

(A.S.E., București)

II1.149. Să se arate că dacă $5\sin b = \sin(2a + b)$ atunci $2\,\mathrm{tg}(a + b) = 3\,\mathrm{tg}\,a$.

II.1.150.* Să se verifice identitățile:

$$\mathrm{tg}\,a + 2\,\mathrm{tg}\,2a + 4\,\mathrm{tg}\,4a + 8\,\mathrm{ctg}\,8a = \mathrm{ctg}\,a.$$

II.1.151. $\mathrm{tg}\,3a - \mathrm{tg}\,2a - \mathrm{tg}\,a = \mathrm{tg}\,3a\ \mathrm{tg}\,2a\ \mathrm{tg}\,a$.

II.1.152.* Din egalitatea

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}$$

să se deducă

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \pm\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right).$$

II.1.153. Fie unghiul a și b despre care se știe că: $\sin a + \sin b = -\frac{14}{65}$ și $\cos a + \cos b = -\frac{8}{65}$. Se cere să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ și $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$.

(Institutul de arhitectură, 1971)

II.1.154. Să se arate că eliminînd pe a din relațiile

$$\frac{\sin a}{m} = \frac{\sin 3a}{n} = \frac{\sin 5a}{p}$$

se obține $m(m+n+p) = n^2$.

(I.P., Galați, 1968)

II.1.155. Să se arate că expresia $E = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ este pozitivă oricare ar fi $x, \left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right)$.

(A.S.E., București, 1971)

Știind că $a + b + c + d = 2\pi$ *să se verifice relațiile de mai jos:*

II.1.156. $\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{b+c}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2}$.

II.1.157. $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 4 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{b+c}{2} \cdot \sin \frac{c+a}{2}$.

II.1.158. $\sin a - \sin b + \sin c - \sin d = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{b+c}{2} \cdot \sin \frac{c+a}{2}$.

II.1.159. $\cos a - \cos b + \cos c - \cos d = 4 \sin \frac{a+b}{2} \cdot$

$\cdot \sin \frac{b+c}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2}$.

II.1.160. Să se transforme

$$E = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

II.1.161. Să se arate că dacă $a + b + c = (4k + 1)\pi$ $(k \in Z)$ expresiile:

$$E_1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} - 2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{a+b}{2}\right);$$

$$E_2 = \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 2 \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{b+c}{2}\right);$$

$$E_3 = \cos^2 \frac{c}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} - 2 \cos \frac{c}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{c+a}{2}\right),$$

sînt egale.

(G.M.B., 1968)

II.1.162.* Să se arate că:

$$\frac{\sec 20^\circ}{\sec 100^\circ + \sec 140^\circ} + \frac{\sec 100^\circ}{\sec 20^\circ + \sec 140^\circ} +$$

$$+ \frac{\sec 140^\circ}{\sec 20^\circ + \sec 100^\circ} + \frac{\sec^3 20^\circ + \sec^3 100^\circ + \sec^3 140^\circ}{\sec 20^\circ \sec 100^\circ \sec 140^\circ} = 0.$$

(G.M.B., 1967)

II.1.163.* Dacă $a^2 + b^2 \leqslant 4$, să se demonstreze egalitatea

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}\right)^2} +$$

$$+ \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2}}\right)^2} = b.$$

(G.M.B., 1968)

II.1.1. a) $\alpha_1 = 180 \cdot \frac{2\pi}{7\pi} = 360 : 7 \approx 51°25'43''$.

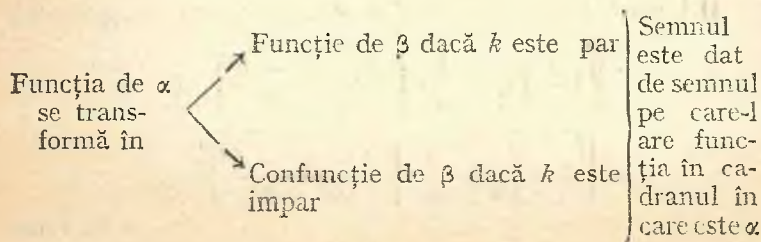
b) $\alpha_2 \approx 9°28'25''$.

c) $\alpha_3 \approx 31°45'53''$.

II.1.2.

α grade	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α radiani	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

II.1.3. Pentru reducerea la primul cadran folosim următoarea regulă pentru $90° < \alpha < 360°$; se poate scrie $\alpha = k \cdot 90° \pm \beta$.



De exemplu:
$\sin 330° = \sin(270° + 60°)$; $270° = 3 \cdot 90°$. Deci k este impar și vom avea $\sin 330° = \sin(270° + 60°) = -\cos 60°$. Am considerat semnul minus, fiindcă arcul de 330° are extremitatea în cadranul IV unde sinusul are valori negative.

$$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(180° + 30°) = +\operatorname{tg} 30° = +\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{ctg} 330° = \operatorname{ctg}(360° - 30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(270° - 30°) = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3} \text{ etc.}$$

II.1.4. Funcția $f(x) = |\sin x|$ are perioada π, deci este suficient să se studieze graficul pe $[0, \pi]$. Pentru o mai bună înțelegere vom construi graficele pe $[0, 2\pi]$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ pentru } x \in [0, \pi] \\ -\sin x \text{ pentru } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \text{ (vezi fig. 56).}$$

II.1.5. Funcția $f(x) = |\cos x|$ are perioada π, deci graficul se poate obține din cel corespunzător unui interval de lungimea π, ca de exemplu: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sau $[0, \pi]$.

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ -\cos x \text{ pentru } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases} \text{ (vezi fig. 57)}$$

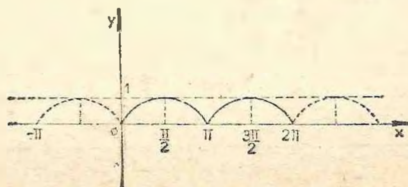


Fig. 56

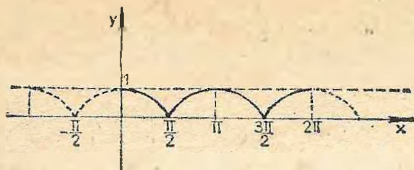


Fig. 57

II.1.6. $|\sin x| + \sin x = \begin{cases} 2\sin x \text{ pentru } x \in [0, \pi] \\ 0 \text{ pentru } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$

(vezi fig. 58)

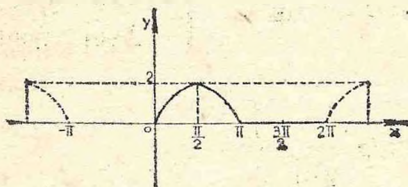


Fig. 58

II.1.7. $|\cos x| + \cos x = \begin{cases} 2\cos x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \\ \qquad \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ 0 \text{ pentru } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$

(vezi fig. 59)

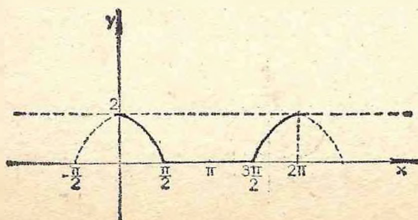


Fig. 59

II.1.8. $\sin x - |\sin x| = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in [0, \pi] \\ +2\sin x \text{ pentru } x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

(vezi fig. 60)

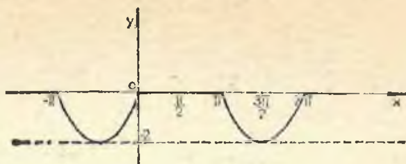


Fig. 60

II.1.9. $|\sin x| - \sin x = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in [0, \pi] \\ -2\sin x \text{ pentru } x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

(vezi fig. 61)

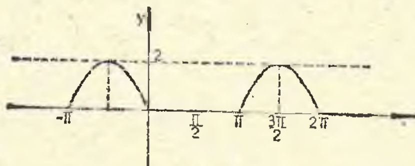


Fig. 61

II.1.10. $\cos x - |\cos x| = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ 2\cos x \text{ pentru } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$

(vezi fig. 62)

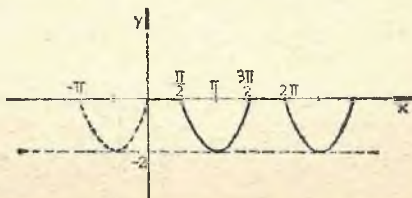


Fig. 62

II.1.11. $|\cos x| - \cos x = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ -2\cos x \text{ pentru } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$

(vezi fig. 63)

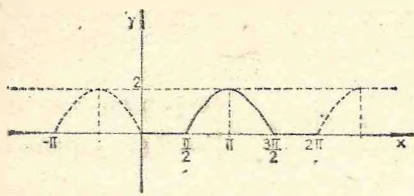


Fig. 63

II.1.12. $\cos x = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg} x =$

$$= \frac{\frac{-2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

II.1.13. $\sin x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$;

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

II.1.14. $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{1+9}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$;

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}.$$

II.1.15. $\sin x < 0$; $\cos x > 0$; $\sin x = \frac{-3}{\sqrt{13}}$;

$$\cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

II.1.16. $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} \Rightarrow \sin x = \frac{a-b}{a+b}$.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4ab}{(a+b)^2} \Rightarrow \cos x =$$

$$= \pm \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = \pm \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}.$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \pm \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

II.1.17. $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}} = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$E = a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

II.1.18. $\sec a = \frac{1}{\cos a}$; $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$ și înlocuind în membrul drept rezultă imediat $\operatorname{tg} a$.

II.1.19. În membrul drept folosim formula:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

II.1.20. În membrul drept se înlocuiește $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ și $\sec a = \frac{1}{\cos a}$.

II.1.21. Se ține seama de formulele: $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$ și $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$. La fel pentru exercițiile: **II.1.22.**, **II.1.23.**, **II.1.24.**

II.1.25. În membrul întîi se exprimă $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{ctg} a$ în funcție de sinus și cosinus iar numărătorul din membrul doi se scrie $1 - 2\cos^2 a = 1 - \cos^2 a - \cos^2 a = \sin^2 a - \cos^2 a$.

II.1.26. $(1 - \cos^4 a) = (1 - \cos^2 a)(1 + \cos^2 a) = \sin^2 a(1 + \cos^2 a)$ etc.

II.1.27. $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$; $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$.

II.1.28. Se ține seama de formulele $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$; $\sec a = \frac{1}{\cos a}$.

II.1.29. În membrul stîng se ține seama de formulele:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}; \quad \operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

II.1.30. Se aduce la același numitor în membrul stîng. Pentru identitățile de la **II.1.31** la **II.1.36** se ține seama de formulele $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$; $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$; $\operatorname{tg} a \operatorname{ctg} a = 1$.

II.1.37. $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}} =$

$$= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

II.1.38. $E_1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $E_2 = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

II.1.39. $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$. Deci $E_1 = 1$.

II.1.40. $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ iar pentru $\sin^6 x + \cos^6 x$ vezi exercițiul precedent. Rezultă $E_2 = -1$.

II.1.41. $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x)^2 + (\cos^4 x)^2 = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x$ etc. $E_3 = 1$.

II.1.42. $1 - \sin^2 x (1 + \cos^2 x) = 1 - (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x) = 1 - (1 - \cos^4 x) = \cos^4 x$.

Înlocuind rezultă: $E_4 = \sin^2 x \cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) =$
$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

II.1.43. $\frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}.$

$$E_5 = \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}}{\sin x + \cos x} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x}}{\sin x + \cos x} = \mathbf{1.}$$

II.1.44. $\frac{7\pi}{12} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \text{etc.}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\ \text{etc.}$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}.$$

II.1.45. $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°$ etc.

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30°$ etc.

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 30°}.$$

$$\operatorname{ctg} 15° = \frac{\operatorname{ctg} 45° \operatorname{ctg} 30° + 1}{\operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 45°}.$$

II.1.46. $75° = 45° + 30°$.

Deci $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos 45°$ etc.

II.1.47. $105° = 60° + 45°$.

II.1.48. $\sin(a + b) \sin(a - b) = [\sin a \cos b + \sin b \cdot \cos a] \cdot [\sin a \cos b - \sin b \cos a] = \sin^2 a(1 - \sin^2 b) - \sin^2 b(1 - \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

II.1.49. $\cos(a + b) \cos(a - b) = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \cdot \sin^2 b = \cos^2 a(1 - \sin^2 b) - \sin^2 b(1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

II.1.50. $\dfrac{\sin(a + b) \sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = \dfrac{\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a}{\cos^2 a \cos^2 b} = \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b$.

II.1.51. $$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} a} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} a} = \frac{4 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

II.1.52. $$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{a}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}}.$$

II.1.53. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} a}$ și ținînd seama că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ rezultă identitatea cerută.

II.1.54. $\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{\frac{3}{2}\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} b}{1+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 b}=\dfrac{\operatorname{tg} b}{2+3\operatorname{tg}^2 b}$.

II.1.55. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. Deci α, β fiind ascuțite avem $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

II.1.56. Raționalizînd numitorii rezultă $\operatorname{tg}\alpha=3+2\sqrt{2}$ și $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1$.

Deci

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; unghiurile fiind ascuțite rezultă: $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

II.1.57. $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$; $\cos\beta=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1=\sin\frac{\pi}{2}$.

Deci $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

II.1.58. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=$ $=1\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$.

II.1.59. Știm că:

$$\sin^2(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)};\ \cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}.$$

Cu aceste formule expresia devine:

$$E=\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}$$

Din ecuația dată rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-p$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=q$$

Deci: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{-p}{1-q}$.

Așadar:

$$E=\frac{\dfrac{p^2}{(1-q)^2}-\dfrac{p^2}{1-q}+q}{1+\dfrac{p^2}{(1-q)^2}}=\frac{p^2-p^2(1-q)+q(1-q)^2}{p^2+(1-q)^2}=$$

$$=\frac{q[p^2+(1-q)]^2}{p^2+(1-q)^2}=q.$$

II.1.60. *Soluția 1°.* Se înlocuiesc $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ cu formulele corespunzătoare și se obține $E=\operatorname{tg}\beta$.

Soluția 2°. $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=$
$=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin\beta.$

$\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha)]=\cos\beta.$

Deci $E=\operatorname{tg}\beta.$

II.1.61. $\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta-2\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta=$ $=\cos(\alpha-\beta)[\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta]+\cos^2\beta=$ $=-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos^2\beta=-(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)+$ $+\cos^2\beta=1-\cos^2\alpha.$

Deci $E=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=1.$

II.1.62. Se observă că

$$\frac{[\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta]\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

iar $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)$ este independentă de α.

II.1.63. $\operatorname{tg}(a+b)=-\operatorname{tg}c\Rightarrow\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}=-\operatorname{tg}c\Rightarrow$ $\Rightarrow\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=-\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c\Rightarrow\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+$ $+\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c.$

II.1.64. $\cos c=-\cos(a+b)=-\cos a\cos b+\sin a\cdot$ $\cdot\sin b\Rightarrow\cos c+\cos a\cos b=\sin a\sin b.$ Ridicăm la pătrat și ținem seama că $\sin^2a=1-\cos^2a$ și $\sin^2b=1-\cos^2b$ deci $\sin^2a\sin^2b=1-\cos^2a-\cos^2b+\cos^2a\cos^2b.$ Se obține: $\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c+\cos^2a\cos^2b=1-\cos^2a-$ $-\cos^2b+\cos^2a\cos^2b$ deci $\cos^2a+\cos^2b+\cos^2c+$ $+2\cos a\cos b\cos c=1.$

II.1.65. $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{b}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}=$

$$=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}.$$

Deci:

$$\frac{\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}+\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\cos\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{c}{2}}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}\left(\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2},$$

de unde

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{b}{2}+\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}.$$

II.1.66. $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}=$

$$=\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{b}{2}+\operatorname{ctg}\frac{c}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}}$$

şi ţinînd cont de identitatea anterioară rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}=1.$$

II.1.67. $E=\frac{3}{2}$.

II.1.68. Membrul drept devine:

$$\frac{(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\cdot 2}{2\cos a\cos b}=\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+$$

$$+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}=\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b.$$

Pentru $a=9^\circ$, $b=81^\circ$ avem; $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=$

$$=\frac{2\sin(9^\circ+81^\circ)}{\cos(9^\circ+81^\circ)+\cos(9^\circ-81^\circ)}=\frac{2}{\cos 72^\circ}.$$

Pentru $a=27^\circ$, $b=63^\circ$ rezultă:

$$\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}63^\circ=\frac{2\sin(27^\circ+63^\circ)}{\cos(27^\circ+63^\circ)+\cos(27^\circ-63^\circ)}=$$

$$=\frac{2}{\cos 36^\circ}.$$

$$E = (\text{tg } 9° + \text{tg } 81°) - (\text{tg } 27° + \text{tg } 63°) = \frac{2}{\cos 72°} -$$

$$- \frac{2}{\cos 36°} = \frac{2(\cos 36° - \cos 72°)}{\cos 72° \cos 36°} =$$

$$= \frac{4 \sin 54° \sin 18°}{\cos 72° \cos 36°} = 4,$$

deoarece $\cos 72° = \sin(90° - 72°) = \sin 18°$,
$\cos 36° = \sin(90° - 36°) = \sin 54°$.

II.1.69. $\arccos \frac{3}{5} = \alpha$, $\arccos \frac{15}{17} = \beta$.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$$

$$= \sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right) \cos\left(\arccos \frac{15}{17}\right) +$$

$$+ \cos\left(\arccos \frac{3}{5}\right) \sin\left(\arccos \frac{15}{17}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{17} +$$

$$+ \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{84}{85},$$

deoarece

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{15}{17}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}; \quad \sin \beta = \frac{8}{17}.$$

II.1.70. $\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) = \alpha$, $\arcsin \frac{4}{5} = \beta$.

$$\sin \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \sin \beta = \frac{4}{5}; \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0; \; 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}; \quad \cos \beta = \frac{3}{5}.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{63}{65}.$$

II.1.71. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\beta$; $0<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$0<\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2};\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1.$$

Deci

$$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

II.1.72. Deoarece $\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}$, rezultă

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right).$$

Deci

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=1.$$

II.1.73. Vom nota:

$$\arcsin\frac{12}{13}=\alpha;\ \arcsin\frac{3}{5}=\beta.$$

Ținînd seama de inegalitățile

$$0<\frac{12}{13}<1;\ \frac{1}{2}<\frac{3}{5}<1,$$

rezultă:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}<\beta<\frac{\pi}{2};$$

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. În final $\sin(\alpha-\beta) = \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} -$

$$-\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} = \frac{33}{65}.$$

Deci $\alpha - \beta = \arcsin\frac{33}{65}$.

II.1.74. Considerînd tangenta ambilor membri se obține:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{7}{4};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{5-\frac{1}{3}}{1+5\cdot\frac{1}{3}} = \frac{7}{4}.$$

II.1.75. Notînd $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ rezultă relația

$$\operatorname{tg} y = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}} = \frac{4}{7}.$$

Notînd $z = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} \Rightarrow \operatorname{tg} z = \frac{3}{11}$.

Deci egalitatea din enunț devine: $\operatorname{arctg}\frac{4}{7} + \operatorname{arctg}\frac{3}{11} = \frac{\pi}{4}$.

Luînd tangentele în fiecare membru rezultă:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{7}+\operatorname{arctg}\frac{3}{11}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \text{ sau } \frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=1,$$

ceea ce confirmă egalitatea.

II.1.76. $\sin 5a = \sin(3a+2a) = \sin 3a \cos 2a + \sin 2a \cdot \cos 3a = (3\sin a - 4\sin^3 a)(1-2\sin^2 a) + 2\sin a\cos a \cdot (4\cos^3 a - 3\cos a) = (3\sin a - 4\sin^3 a)(1-2\sin^2 a) + 2\sin a\cos^2 a\cdot(4\cos^2 a - 3) = (3\sin a - 4\sin^3 a)(1-2\sin^2 a) + 2\sin a\cdot(1-\sin^2 a)(1-4\sin^2 a) = 5\sin a - 20\sin^3 a + 16\sin^5 a.$

II.1.77. $\cos 5a = \cos(3a+2a) = \cos 3a\cos 2a - \sin 3a\cdot\sin 2a$. În continuare se ține seama de expresiile lui $\cos 3a$, $\sin 3a$, $\cos 2a$, $\sin 2a$.

II.1.78. $\sin 6a = 2\sin 3a\cos 3a = 2(3\sin a - 4\sin^3 a)(4\cos^3 a - 3\cos a)$ etc.

II.1.79. $\cos 4a = \cos^2 2a - \sin^2 2a = 2\cos^2 2a - 1 = 2(2\cos^2 a - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1.$

II.1.80. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{24}{7}$.

II.1.81. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ adică $t^2\sin x - 2t + \sin x = 0$.

Rezolvăm ecuația de gradul doi.

$$t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{1\pm\cos x}{\sin x}.$$

Înlocuind $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se obține valoarea lui t.

II.1.82. $$\sin 2a = \frac{2}{\frac{1}{\sin a \cos a}} = \frac{2}{\frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a}} = \frac{2}{\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a}.$$

Deci $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \frac{2}{\sin 2a}$.

II.1.83. $$\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \frac{2 \sin a \cos a}{2 \cos^2 a} \cdot \frac{\cos a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}}$$

deoarece $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$ și $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$.

Deci

$$E = \frac{2 \sin a \cos^2 a}{4 \cos^2 a \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

S-a folosit relația $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$.

II.1.84. $$\frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} = \frac{(\cos a + \sin a)^2}{(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)} = \frac{1 + \sin 2a}{\cos 2a} = \frac{1}{\cos 2a} + \operatorname{tg} 2a.$$

S-a folosit formula $(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

II.1.85. Dezvoltînd membrul stîng se obține:

$$2 + 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 + 2\cos(a-b) =$$

$$= 2[1 + \cos(a-b)] = 2\cos^2 \frac{a-b}{2}.$$

S-a utilizat relația $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$. În cazul nostru, $x = a - b$.

II.1.86. Dezvoltînd membrul stîng se obține:

$$2[1 - \cos(a-b)] = 4\sin^2 \frac{a-b}{2}.$$

S-a utilizat relația $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

II.1.87. $\sin 3a \operatorname{cosec} a - \cos 3a \sec a = \frac{\sin 3a}{\sin a} -$

$$- \frac{\cos 3a}{\cos a} = \frac{\sin 3a \cos a - \sin a \cos 3a}{\sin a \cos a} =$$

$$= \frac{\sin(3a - a)}{\frac{1}{2}\sin 2a} = \frac{\sin 2a}{\frac{1}{2}\sin 2a} = 2.$$

Se poate proceda și astfel:

$$\frac{\sin 3a}{\sin a} - \frac{\cos 3a}{\cos a} = \frac{3\sin a - 4\sin^3 a}{\sin a} -$$

$$- \frac{4\cos^3 a - 3\cos a}{\cos a} = 3 - 4\sin^2 a - (4\cos^2 a -$$

$$- 3) = 6 - 4(\sin^2 a + \cos^2 a) = 6 - 4 = 2.$$

II.1.88. Se consideră expresia $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ în parantezele din membrul întîi.

II.1.89. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ și dezvoltînd parantezele se obține $\cos 3x + 1$.

II.1.90. Se efectuează operațiile indicate în membrul stîng.

II.1.91. Se calculează $\operatorname{tg} 2b$ și apoi $\operatorname{tg}(a + 2b)$.

II.1.92. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(2x + 3x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x - 10\operatorname{tg}^3 x - 5\operatorname{tg} x}{5\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

II.1.93. Se calculează

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{5}{12} \text{ iar apoi } \operatorname{tg} 4a = \frac{2\operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = \frac{120}{119}.$$

$$\operatorname{tg}(4a - b) = \frac{\operatorname{tg} 4a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} 4a \operatorname{tg} b} = 1 \text{ de unde } 4a - b = \frac{\pi}{4}.$$

II.1.94. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2} - 1 =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2};\ 2a = \frac{\pi}{6}.$$

Deci $a = \dfrac{\pi}{12}$.

II.1.95. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \dfrac{3\pi}{4}$.

II.1.96. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

II.1.97. $E=\sqrt{\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{10}}{2\cos^2\dfrac{\pi}{10}}}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}.$

II.1.98. $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ deci $\cos 2a=$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 4a}{2}}=\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$$\cos a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}=\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

II.1.99. $2\cos^2\dfrac{a}{2}=1+\cos a$ deci $4\cos^4\dfrac{a}{2}=(1+$

$$+\cos a)^2=1+2\cos a+\frac{1+\cos 2a}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(3+4\cos a+\cos 2a).$$

Deci

$$\cos^4 \frac{a}{2} = \frac{1}{8}(3 + 4\cos a + \cos 2a).$$

Aplicînd această formulă succesiv în relația dată se obține:

$$\frac{12}{8} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}\right) +$$
$$+ \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{5\pi}{2} + \cos\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

fiecare paranteză fiind nulă.

II.1.100. $\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) = \frac{1+\cos 2(a+b)}{2} +$
$+ \frac{1+\cos 2(a-b)}{2} = 1 + \cos 2a \cos 2b$. Deci $E = 1$.

II.1.101. $$\sqrt{\frac{5 + \frac{6u}{1+u^2} + \frac{4(1-u^2)}{1+u^2}}{2 - \frac{2(1-u^2)}{1+u^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{(u+3)^2}{1+u^2}}{\frac{4u^2}{1+u^2}}}.$$

$$E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(u+3)^2}{u^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{u+3}{u} \text{ pentru } u \in (\infty, -3] \cup (0, +\infty), \\ -\frac{1}{2}\frac{u+3}{u} \text{ pentru } u \in (-3, 0). \end{cases}$$

II.1.102. $$E = \begin{cases} \frac{u}{1+u} \text{ pentru } u \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty), \\ \frac{-u}{1+u} \text{ pentru } u \in (-1, 0). \end{cases}$$

II.1.103. Notînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ avem:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Cum $t = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}; \Longrightarrow E = 1.$

II.1.104. Știm că

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \text{ și } \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

și înlocuind în E rezultă:

$$E = m\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + n\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = n.$$

II.1.105. Fie $N = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} =$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x.$$

$$D = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{ctg}^2 x)} = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$\sin^2 x \cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x.$

$E = \frac{N}{D} = 1$, deci relația este independentă de x.

II.1.106. $2 \sin 90° \cos 15° = 2 \cos 15°.$

II.1.107. $2 \cos 45° \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$

II.1.108. $2 \sin 52° \cos 64°$.

II.1.109. $-2 \sin 90° \sin 45° = -\sqrt{2}$.

II.1.110. $2 \sin 180° \sin 60° = 0$.

II.1.113. Se înlocuiesc cosinusurile de puteri, în funcție de arcele duble și apoi se trece de la sume de cosinusuri la produse.

II.1.114. $1 + \sin 2x = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

$$1 - \sin 2x = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

II.1.115. $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$,

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x.$$

II.1.116. $\dfrac{1 + \sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos^2 x}$;

$$\frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^2 x}.$$

$$\frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos^2 x},$$

$$\frac{1 - \sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^2 x}.$$

II.1.117. $1 \pm \operatorname{tg} x = \sqrt{2}\ \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right)}{\cos x}$.

II.1.118. Ținînd seama de egalitățile:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2};$$

$$\sin(A+B) = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2};$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2},$$

$$\sin(A-B) = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

relațiile date devin:

$$\cos \frac{A-B}{2} = m \cos \frac{A+B}{2}$$

și

$$\sin \frac{A+B}{2} = -n \cos \frac{A-B}{2}$$

de unde

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = -mn.$$

$$\sin \frac{A+B}{2} = -\frac{mn}{\sqrt{1+m^2n^2}}; \quad \cos \frac{A+B}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2n^2}};$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2n^2}}; \quad \sin \frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1-m^2+m^2n^2}{1+m^2n^2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sqrt{1-m^2+m^2n^2}}{m}.$$

II.1.119. $\text{tg } a + \text{tg } b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$ deci primul membru al egalității se scrie:

$$\frac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\cos(81^\circ + 9^\circ) + \cos(81^\circ - 9^\circ)} -$$

$$- \frac{2}{\cos(63^\circ + 27^\circ) + \cos(63^\circ - 27^\circ)} = \frac{2}{\cos 72^\circ} -$$

$$- \frac{2}{\cos 36^\circ} = 4\,\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ} =$$

$$= 4\,\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos(72^\circ - 36^\circ) + \cos(72^\circ + 36^\circ)} =$$

$$= 4\,\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 36^\circ + \cos 108^\circ}.$$

$72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$; $\cos 72^\circ = -\cos 108^\circ$ de unde rezultă $E = 4$. (Vezi și exercițiul II.1.68).

II.1.120. $E = \text{tg } 5x$.

II.1.121. $$\text{tg } x = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{ tg } b} = \frac{\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos(a-b)}{\cos a \cos b}} =$$

$$= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)}.$$

Dar $\sin 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}$

deci

$$\sin 2x = \frac{\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a-b)}}{1+\dfrac{\sin^2(a+b)}{\cos^2(a-b)}} = \frac{2\sin(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2(a-b)+\sin^2(a+b)} =$$

$$= \frac{\sin 2a + \sin 2b}{(\cos a \cos b + \sin a \sin b)^2 + (\sin a \cos b + \cos b \sin b)^2} =$$

$$= \frac{\sin 2a + \sin 2b}{\cos^2 b(\sin^2 a + \cos^2 a) + \sin^2 b(\sin^2 a + \cos^2 a) + 4 \sin a \cos a \sin b \cos b} =$$

$$= \frac{\sin 2a + \sin 2b}{1 + \sin 2a \sin 2b}.$$

II.1.122. $E_1 = 2 \sin \dfrac{x+5x}{2} \cos \dfrac{x-5x}{2} = 2 \sin 3x \cos 2x$ deoarece $\cos(-2x) = \cos 2x$.

II.1.123. $E_2 = (\sin x + \sin 5x) + \sin 3x = 2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = \sin 3x(2\cos 2x + 1) = 2\sin 3x\left(\cos 2x + \dfrac{1}{2}\right) =$

$$= 2\sin 3x\left(\cos 2x + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin 3x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

II.1.124. $F_1 = \dfrac{\sin 3x + (\sin x + \sin 5x)}{\cos 3x + (\cos x + \cos 5x)} =$

$$= \frac{\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x}{\cos 3x + 2 \cos 3x \cos 2x} = \frac{\sin 3x(1+2\cos 2x)}{\cos 3x(1+2\cos 2x)} =$$

$$= \operatorname{tg} 3x. \left(\cos 2x \neq -\frac{1}{2} \text{ adică } x \neq \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi\right)$$

II.1.125. $F_2 = \dfrac{\sin 4x + 2\sin 4x\cos 2x}{2\cos^2 2x + \cos 2x} =$

$$= \frac{\sin 4x(1 + 2\cos 2x)}{\cos 2x(1 + 2\cos 2x)} = \frac{\sin 4x}{\cos 2x} = \frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x} =$$

$$= 2\sin 2x,\ x \neq k\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

II.1.126. $F_3 = \dfrac{\cos 2x}{\sin x},\quad x \neq k\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}.$

II.1.127. $F_4 = \dfrac{(\sin 7x + \sin 4x)(\sin 7x - \sin 4x)}{(\cos 5x + \cos 6x)(\cos 5x - \cos 6x)} =$

$$= \frac{\cos\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin 3x}{\sin x} = 4\cos^2 x - 1,$$

$$\left(\sin\frac{11x}{2} \neq 0;\ \cos\frac{11x}{2} \neq 0;\ mx \neq 0\right).$$

II.1.128. Se știe că $2\cos a\cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$. Ținînd seama că $a + b = 180° - c$, $\cos(a + b) = -\cos c$, expresia devine
$E = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - [\cos(a - b) - \cos c]\cdot\cos c = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \cos^2 c + \cos(a - b)\cos(a + b)$ etc.

$$E = 2.$$

II.1.129. Ținînd seama de $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$ rezultă

$$E = (a^2 + b^2)\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = (a + b)^2\sin^2\frac{x}{2} + (a - b)^2\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= (a + b)^2\cos^2\frac{x}{2}\left[1 + \left(\frac{a + b}{a - b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2\right].$$

Notînd $\frac{a+b}{a-b}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg} y$ obținem:

$$E=(a-b)^2\cos^2\frac{x}{2}\sec^2 y.$$

II.1.130. $\sin(x+a)\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x+a)+\frac{1}{2}\sin a,$

$$\sin x\cos(x+a)=\frac{1}{2}\sin(2x+a)-\frac{1}{2}\sin a,$$

$$\cos(x+a)\cos x=\frac{1}{2}\cos a+\frac{1}{2}\cos(2x+a),$$

$$\sin x\sin(x+a)=\frac{1}{2}\cos a-\frac{1}{2}\cos(2x+a).$$

Rezultă $E=\operatorname{tg} a$.

II.1.131. $E=n\left(\frac{m}{n}+\operatorname{tg} x\right)\cdot$ Notînd $\frac{m}{n}=\operatorname{tg} y$ rezultă:

$$E=n(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)=\frac{n\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=n\sec x\sec y\sin(x+y).$$

II.1.132. $E=(\sin a+\cos a)(\sin^2 a+\cos^2 a-\sin a\cdot\cos a)=t(1-\sin a\cos a)$. Dar $(\sin a+\cos a)^2=1+2\sin a\cdot\cos a=t^2$, de unde $\sin a\cos a=\frac{t^2-1}{2}$.

Deci $E=\frac{t}{2}(3-t^2)$.

II.1.133. $E=\sqrt{2\operatorname{tg} x}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)$

apoi se ține seama de expresiile celor două module

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \sin\frac{x}{2} \text{ pentru } \frac{x}{2} \in [0, \pi], \\ -\sin\frac{x}{2} \text{ pentru } \frac{x}{2} \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \text{ pentru } \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{0}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]; \\ -\cos\frac{x}{2} \text{ pentru } \frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right). \end{cases}$$

II.1.134. $E = 2 \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$

II.1.135. $E = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot$

$$\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$$

II.1.136. $\operatorname{tg}^2x + \operatorname{ctg}^2x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2$; $\operatorname{tg}^3x + \operatorname{ctg}^3x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 - 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

Dar $(\sin x + \cos x)^2 = a^2 \Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = a^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{a^2-1}{2}$. În final, $E = -2$.

II.1.137. $\sin^3x + \cos^3x + 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x) = a^3$;
$b + 3(\sin x \cos x)\cdot a = a^3$;
$\sin x \cos x = \frac{a^3-b}{3a}$.

Dar $(\sin x + \cos x)^2 = a^2 \Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = a^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$. Deci $\frac{a^3 - b}{3a} = \frac{a^2 - 1}{2}$ adică $a^3 - 3a + 2b = 0$.

II.1.138. Se adună cele două relații și rezultă $a + b = \cos x$. Înlocuind $\cos x$ în prima relație se obține $2(a + b)^3 = 2a + b$.

II.1.139. Se utilizează identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Se ridică la pătrat și apoi la cub, obținînd în final $3a - 2b = 1$.

II.1.140. $(a \sin x - b \cos x)^2 = a^2 + b^2$ sau $a^2 + b^2 - (a \sin x - b \cos x)^2 = 0$.

$a^2 \cos^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \sin^2 x = 0$.

$(a \cos x + b \sin x)^2 = 0 \Rightarrow a \cos x + b \sin x = 0$ de unde $\operatorname{tg} x = -\frac{a}{b}$, $\cos^2 x = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$; $\sin^2 x = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$,

valori care substituite în a doua egalitate conduc la:

$$\frac{1}{a^2 + b^2}\left(\frac{b^2}{u^2} + \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2} \text{ adică } \frac{b^2}{u^2} + \frac{a^2}{t^2} = 1.$$

II.1.141. Se inversează mai întîi rapoartele respective. În final se obține

$$2a(1 - a) = b(1 - 2a^2).$$

II.1.142. $1 - 2a = b(-1 - 4a + 2a^2)$.

II.1.143. Se ridică la pătrat cele două relații și se adună. Rezultă

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = a^2 + b^2 + 3.$$

Ridicînd la pătrat și scăzînd relațiile respective se obține

$$\cos 2x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 2}.$$

Dar $\cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$, deci

$$\left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 2}\right]^2 + \left[\frac{4}{a^2 + b^2 + 3}\right]^2 = 1.$$

II.1.144. $a^3 - 3a + 2b = 0.$

II.1.145. $\begin{cases} x \cos a + y \sin b = m \\ -y \cos a + x \sin b = n \end{cases} \Rightarrow \sin b = \dfrac{my + nx}{x^2 + y^2}$

şi

$$\cos a = \frac{mx - ny}{x^2 + y^2}; \text{ etc.}$$

II.1.146. $E = \dfrac{(\cos x + \sin x)(3\cos x + \sin x + 1)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - 3\sin x + 3)}$.

Notăm în continuare $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ de unde $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ şi $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ şi introducînd în E, după simplificare rezultă:

$$E = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

II.1.147. $E = \dfrac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \dfrac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} +$

$$+ \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x} =$$

$$= \frac{\sin x + \cos x - 1 + 1 - \sin x - \cos x + \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 1.$$

$$\left(x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z\right).$$

II.1.148. a) Împărțind membru cu membru relațiile date și transformînd sumele în produs rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{b}{a}.$$

$$\sin(x+y)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

b) $\sin^2(x-y)=1-\cos^2(x-y)=1-\left[\frac{a^2+b^2-2}{2}\right]^2=$

$$=\frac{(a^2+b^2)(4-a^2-b^2)}{4}.$$

II.1.149. $5\sin b=\sin 2a\cos b+\cos 2a\sin b$ sau $\sin b\cdot(5-\cos 2a)=\sin 2a\cos b$. Împărțind prin $\cos b\neq 0$, rezultă

$$\operatorname{tg} b=\frac{\sin 2a}{5-\cos 2a}.$$

$$2\operatorname{tg}(a+b)=2\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}=2\frac{\operatorname{tg} a+\frac{\sin 2a}{5-\cos 2a}}{1-\operatorname{tg} a\frac{\sin 2a}{5-\cos 2a}}=$$

$$=2\frac{\sin a(5-\cos 2a)+2\sin a\cos^2 a}{\cos a(5-\cos 2a)-2\sin^2 a\cos a}=$$

$$=2\frac{6\sin a}{4\cos a}=3\operatorname{tg} a.$$

II.1.150. Se cunosc identitățile:

$$\operatorname{tg} a-\operatorname{ctg} a=-2\operatorname{ctg} 2a,$$
$$2\operatorname{tg} 2a-2\operatorname{ctg} 2a=-4\operatorname{ctg} 4a,$$
$$4\operatorname{tg} 4a-4\operatorname{ctg} 4a=-8\operatorname{ctg} 8a.$$

Adunînd membru cu membru rezultă:

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a + 2 \operatorname{tg} 2a + 4 \operatorname{tg} 4a = -8 \operatorname{ctg} 8a.$$

Deci

$$\operatorname{tg} a + 2 \operatorname{tg} 2a + 4 \operatorname{tg} 4a + 8 \operatorname{ctg} 8a = \operatorname{ctg} a.$$

II.1.151. $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} - \frac{\sin 2a}{\cos 2a} - \operatorname{tg} a =$

$$= \frac{\sin 3a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a}{\cos 3a \cos 2a} - \operatorname{tg} a =$$

$$= \frac{\sin a}{\cos 3a \cos 2a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a(\cos a - \cos 3a \cdot \cos 2a)}{\cos a \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\sin a \sin 2a \sin 3a}{\cos a \cos 2a \cos 3a} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

II.1.152. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}.$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \qquad (1)$$

Înlocuind în (1) pe $\sin x$ cu expresia dată în enunț se obține:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{(1+\sin a)\,(1+\sin b)}{(1-\sin a)\,(1-\sin b)}.$$

Din relația (1) se deduce

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right)$$

sau încă

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\pm\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right).$$

II.1.153. $2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=-\frac{14}{65}$;

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=-\frac{8}{65}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{7}{4};$$

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{2}}=-\frac{56}{33}.$$

$$\cos\frac{a-b}{2}=\frac{-\frac{8}{65}}{2\cos\frac{a+b}{2}}=\frac{-\frac{8}{65}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{2}}}}=-\frac{\sqrt{65}}{65};$$

$$\sin\frac{a-b}{2}=\frac{8}{\sqrt{65}};\quad\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=-8.$$

II.1.154. $\frac{\sin a}{m} = \frac{3\sin a - 4\sin^3 a}{n} \Rightarrow \sin^2 a =$

$$= \frac{3m - n}{4m}. \qquad (1)$$

$$\frac{\sin a}{m} = \frac{\sin 5a}{p} = \frac{2\sin 3a \cos 2a}{m + p} \Rightarrow \frac{2\sin 3a\cos 2a}{m+p} =$$

$$= \frac{\sin 3a}{n};\ \cos^2 a = \frac{m + 2n + p}{4n}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă relația cerută.

II.1.155. $E = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}} =$

$$= \operatorname{tg}^2 x\, \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} = \operatorname{tg}^2 x\, \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}^2 x\, \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \geqslant 0, \left(x \in R - \left\{k\pi - \frac{3\pi}{4}\right\}\right).$$

II.1.156. $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2};$

$$\cos c + \cos d = 2\cos\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2} =$$

$$= -2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{c-d}{2}$$

deci

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d =$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{c-d}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c-b-d}{4}\sin\frac{b+c-a-d}{4}.$$

Dar $\sin\frac{a+c-b-d}{4} = \sin\frac{2a+2c-360^\circ}{4} =$

$$= \sin\left(\frac{a+c}{2} - 90^\circ\right) = -\cos\frac{a+c}{2}.$$

În același mod se obține și

$$\sin\frac{b+c-a-d}{4} = -\cos\frac{b+c}{2}.$$

Deci $\cos a + \cos b + \cos c + \cos d =$

$$= 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+c}{2}.$$

II.1.157. $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$;

$$\sin c + \sin d = 2\sin\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2} =$$

$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c-d}{2}$; $\sin a + \sin b + \sin c +$

$$+ \sin d = 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{c-d}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c-b-d}{4}\cdot\cos\frac{a+d-b-c}{4} =$$

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2},$$

deoarece

$$\cos\frac{a+c-b-d}{4}=\sin\frac{a+c}{2} \text{ și } \cos\frac{a+d-b-c}{4}=$$
$$=\sin\frac{b+c}{2}.$$

II.1.158. $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$; $\sin c-$

$$-\sin d=2\sin\frac{c-d}{2}\cdot\cos\frac{c+d}{2}=-2\sin\frac{c-d}{2}\cos\frac{a+b}{2};$$

$$\sin a-\sin b+\sin c+\sin d=2\cos\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{a-b}{2}-\right.$$
$$\left.-\sin\frac{c-d}{2}\right)=4\cos\frac{a+b}{2}\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{a+d-b-c}{4}\cos\frac{a+c-b-d}{4}=$$
$$=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2}$$

fiindcă

$$\sin\frac{a+d-b-c}{4}=\cos\frac{b+c}{2} \text{ și } \cos\frac{a+c-b-d}{4}=$$
$$=\sin\frac{a+c}{2}.$$

II.1.159. $\cos a-\cos b=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$;

$$\cos c-\cos d=2\sin\frac{c+d}{2}\sin\frac{d-c}{2}=$$
$$=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{d-c}{2}.$$

Deci relația se scrie succesiv:

$$\cos a - \cos b + \cos c - \cos d = 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{b-a}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{d-c}{2}\right) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+d-a-c}{4}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{b+c-a-d}{4} = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+c}{2}$$

fiindcă

$$\sin\frac{b+d-a-c}{4} = \cos\frac{a+c}{2} \text{ și } \cos\frac{b+c-a-d}{4} =$$

$$= \sin\frac{b+c}{2}.$$

II.1.160. Se adună și se scade $\cos^2 a \cos^2 b$ obținîndu-se: $1 - \cos^2 a - \cos^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2 + \cos^2 a \cos^2 b = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - (\cos c - \cos a \cos b)^2 = \sin^2 a \cdot \sin^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2 = (\sin a \sin b + \cos c - \cos a \cdot \cos b)(\sin a \sin b - \cos c + \cos a \cdot \cos b) = [\cos c - \cos(a + b)][\cos(a - b) - \cos c] =$

$$= 4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}.$$

II.1.161. Se va arăta că $E_1 - E_2 = 0$, $E_1 - E_3 = 0$, $E_2 - E_3 = 0$.

$$E_1 - E_2 = \left[\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} - 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a+b}{2}\right)\right] - \left[\cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b+c}{2}\right)\right] = \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{c}{2} - 2\cos\frac{b}{2}\left[\cos\frac{a}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a+b}{2}\right) - \cos\frac{c}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{b+c}{2}\right)\right].$$

Dar

$$\frac{a+b}{2} = (4k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2} \text{ și } \frac{b+c}{2} = (4k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}.$$

Deci putem scrie:

$$\sin\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}; \cos\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}; \sin\frac{b+c}{2} =$$

$$= \cos\frac{a}{2}; \cos\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2}.$$

Ținînd seama de această relație se obține succesiv

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{a+b}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{a+b}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{a+b}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{c}{2}; \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{b+c}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}.$$

Deci

$$E_1 - E_2 = \frac{1+\cos a}{2} - \frac{1+\cos c}{2} - 2\cos\frac{b}{2}\left[\cos\frac{a}{2}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\sin\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{c}{2}\right) - \cos\frac{c}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2} -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}\right)\right]$$

sau încă

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2}(\cos a - \cos c) - \cos\frac{b}{2}\left(\cos\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} -\right.$$

$$\left. - \cos\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2}\right).$$

Dar $\cos a - \cos c = -2 \sin\frac{a+c}{2} \sin\frac{a-c}{2} =$

$= -2\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a-c}{2}$ și $\cos\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} - \cos\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2} =$

$$= -\sin\frac{a-c}{2}.$$

În final putem scrie:

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2}\left(-2\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\right) -$$

$$-\cos\frac{b}{2}\left(-\sin\frac{a-c}{2}\right) = -\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a-c}{2} +$$

$$+\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a-c}{2} = 0.\ \text{Deci } E_1 = E_2.$$

Analog, $E_3 - E_2 = 0$ și rezultă în final că $E_1 = E_2 = E_3$.

II.1.162. Notăm $\sec 20° = a$, $\sec 100° = b$, $\sec 140° = c$. Avem

$$\frac{1}{\sec 20°} + \frac{1}{\sec 100°} + \frac{1}{\sec 140°} = \cos 20° + \cos 100° +$$

$$+ \cos 140° = 2\cos\frac{100° + 20°}{2}\cos\frac{100° - 20°}{2} - \cos 40° = 0$$

deci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Va trebui demonstrată relația

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = 0$$

cu condiția $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$

II.1.163. Se notează $a = \sin x + \sin y$, $b = \cos x + \cos y$.

$$\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(x - y)}{1 + \cos(x - y)}} = \operatorname{tg} \frac{x - y}{2}.$$

$$\frac{b}{2}\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{\cos x + \cos y}{2} \operatorname{tg} \frac{x - y}{2} =$$

$$= \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \operatorname{tg} \frac{x - y}{2} =$$

$$= \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} = \frac{\sin x - \sin y}{2}.$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} = \sin x; \quad \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} = \sin y.$$

Deci

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} + \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\cos x| + |\cos y|.$$

II.2. ECUAȚII TRIGONOMETRICE. INECUAȚII TRIGONOMETRICE

Exerciții și probleme

Să se rezolve următoarele ecuații:

II.2.1. $\cos 2x = \cos x + 1.$

II.2.2. $\cos x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$

II.2.3. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$

II.2.4. $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}.$

II.2.5. $2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 5.$

II.2.6. $\operatorname{tg} 2x = 5 \operatorname{tg} x.$

II.2.7. $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

II.2.8. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$

II.2.9. $\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x.$

II.2.10. $\sin 2x + \sin x = 2 \sin \dfrac{3x}{2} \cos 5x.$

II.2.11. $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}.$

II.2.12. $\sin x + \cos x = -1.$

II.2.13. $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1.$

II.2.14. $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2.$

II.2.15. $4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} = 0.$

II.2.16. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

II.2.17. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}.$

II.2.18. $\operatorname{tg}(a + x)\operatorname{tg}(a - x) = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}.$

II.2.19. $\operatorname{tg}(x + a) + \operatorname{tg}(x - a) = \operatorname{tg} 2x$, a fiind un unghi dat.

II.2.20. $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

II.2.21. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$

II.2.22. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + \frac{1}{2} = 0.$

II.2.23. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$

II.2.24. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$

II.2.25. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$

II.2.26. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

(A.S.E., Bucureşti, 1967)

II.2.27. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2.$

(A.S.E., Bucureşti, 1967)

II.2.28. $\frac{\cos 2x - 1}{2\cos 2x + 4} = |\sin x|.$

(I.P., Bucureşti, 1975)

II.2.29. $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0.$

II.2.30. $\frac{\cos ax + \cos 3ax + \cos 5ax}{\sin ax + \sin 3ax + \sin 5ax} = \sqrt{3}$.

II.2.31. Să se calculeze $\sin x$ și $\cos x$ știind că:

$$\cos 2x = a(\sin x + \cos x).$$

II.2.32. $\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x + \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\right]^2 = 2.$

(I.P., Brașov, 1969)

II.2.33. $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.

II.2.34. $[\sin^2 x + (\cos 2x - 1)\cos^2 x]\sin^2(\pi + x) - [\sin^2 x(1 + \cos 2x) - \cos^2 x]\cdot\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$.

(I.P., Brașov, 1971)

II.2.35. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$.

II.2.36. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$.

(A.S.E., București, 1970)

II.2.37. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$.

(A.S.E., București)

II.2.38. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{121}{196}$.

(A.S.E., București)

II.2.39. $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$.

II.2.40. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x$.

(A.S.E., București, 1970)

II.2.41. Să se afle cosinusul și sinusul unghiului x care satisface ecuația: $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0$.

II.2.42. Ecuația $a \cos x + b \sin x = c$ admite rădăcinile x_1 și x_2, cuprinse între 0 și 2π. Să se calculeze în funcție de a, b, c:

$$\cos (x_1 + x_2);\ \sin(x_1 + x_2);\ \cos(x_1 - x_2);\ \sin(x_1 - x_2).$$

II.2.43. a) Să se verifice identitatea:

$$(1 - \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b \sin^2 c = (\cos b - \cos c)^2.$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$x^2 \sin^2 b - 2x(1 - \cos b \cos c) + \sin^2 c = 0$$

c) u și v fiind rădăcinile ecuației de la b) să se calculeze:

$$\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{u} - \sqrt{v}} \text{ dacă } b = \frac{2\pi}{3} \text{ și } c = \frac{\pi}{3}.$$

II.2.44. a) Să se verifice identitatea:

$$(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a - b}{2}$$

și apoi să se rezolve ecuația:

$$(\sin a + \sin b)x^2 - 2(\cos a + \cos b)x - \sin a - \sin b = 0.$$

b) Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației precedente să se afle $a + b$ știind că $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

(I.P., Iași, 1972)

II.2.45. $\cos^2 2x - 2 \sin 2x \sin^2 x - \cos 2x = 0$.

II.2.46. $\sin (2 \arcsin x) = \operatorname{tg} (2 \operatorname{arctg} x)$.

II.2.47. $(\sin x + \cos x)^n + (\sin x - \cos x)^n = 0$.

II.2.48. $\arcsin x + \arccos (1 - x) = \arcsin (- x)$.

II.2.49. $\arcsin mx = \arccos nx$.

II.2.50. $2 \arcsin x = \arccos 2x$.

II.2.51. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = m(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

şi să se discute după parametrul $m \in R$.

II.2.52. Fie ecuația:

$$m \cos 6x + (4 - m) \sin 3x + 2 - m = 0.$$

Se cer intervalele de variație ale lui m pentru ca toate soluțiile să fie reale.

(Institutul de Construcții, 1971)

II.2.53. a) Să se rezolve ecuația:

$$m \cos 2x + 4(m + 1) \sin x - 3m - 4 = 0.$$

$$m \in R - \{0\}.$$

și să se discute după valorile parametrului m.

b) Să se scrie soluțiile pentru $m = -2 - \sqrt{2}$.

(I.P., Galați, 1972)

II.2.54. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$2m^2 \sin x(\cos x + \cos 2x) = (3m - 2)(\sin x + \sin 3x).$$

(Institutul de Construcții, 1971)

II.2.55. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = m \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, m fiind un parametru real.

II.2.56. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$(1 - a) \cos 4x - 2(5 - 2a) \cos 2x + 5a + 13 = 0.$$

(I.P., Brașov, 1970)

II.2.57. Să se discute ecuația:

$$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3m.$$

II.2.58. Se dă ecuația:

$$1 + \cos 4x = m(\sin x - \cos x)^2.$$

a) Să se rezolve și să se discute ecuația.

b) Să se rezolve ecuația pentru $m = 2 + \sqrt{3}$.

(I.P., Brașov, 1971)

II.2.59. Să se determine valorile parametrului $m \in R$ pentru care ecuația:

$$m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1) \sin x - 3m + 1 = 0$$

are rădăcini. Să se găsească aceste rădăcini.

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații:

II.2.60. $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = 0. \end{cases}$

II.2.61. $\begin{cases} \sin(x + y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$

II.2.62. $\begin{cases} 2 \cos x \cos y = 1 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$

II.2.63. $\begin{cases} 2 \sin^3 x = \sin y \\ 2 \cos^3 x = \cos y. \end{cases}$

II.2.64. $\begin{cases} \arcsin x \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12} \\ \arccos x \arccos y = \dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$

II.2.65. $\begin{cases} \arcsin x = - \arccos y \\ \cos [3\pi(x + y)] = 1. \end{cases}$

Să se rezolve inecuațiile:

II.2.66. $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)(2 \cos^2 x - 1) < 0, \ x \in [0, 2\pi]$.

II.2.67. $\operatorname{tg} x(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)(3 - \operatorname{tg}^2 x) > 0, \ x \in (0, \pi)$.

II.2.68. $\dfrac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2.$

II.2.69. $2 \sin x > \cos^2 x$.

II.2.70. $\frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} > \frac{1 - 2\cos^2 x}{3 - 4\cos^2 x}$.

II.2.71. $\frac{8\cos^2 x - 2\sqrt{6}}{4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6}} < 1$;
$(0 < x < 2\pi)$.

II.2.72. $\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x - 1} > -1$; pentru $x \in (0, 2\pi)$.

II.2.73. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \geqslant 0$.

II.2.74. $\cos x - \sin x > 1$.

II.2.75. $2\cos^2 x + \sin 2x \leqslant 1$.

II.2.76. $\frac{-2\sin^2 x + \cos x}{\cos 2x} > 2$; $x \in [0, 2\pi]$.

II.2.77. $\sin \frac{2x}{3} \cos x \cos \frac{x}{3} > 0$.

II.2.78. $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$.

II.2.79. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} > 1 + \operatorname{ctg} x$.

II.2.80. $\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 1$.

II.2.81. $\arcsin(2x - 1) < \arcsin(1 - x)$.

II.2.82. $\arcsin x > \arccos x$.

II.2.83. $\arcsin(x^2 - 1) > \frac{\pi}{6}$.

II.2.1. Putem scrie: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + 1$

$2\cos^2 x - \cos x = 2$. Notăm $\cos x = y$.

$$2y^2 - y - 2 = 0,\ y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4};$$

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4};\ x = (2k+1)\pi \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{17}}{4}.$$

II.2.2. *Soluția I.* Exprimăm $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$ și ridicăm la pătrat. Obținem:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2},$$

$$1 - 3\operatorname{tg}^2 x = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

Soluția II. Transformăm membrul doi al ecuației și se obține

$$\cos x = \frac{\dfrac{2\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}};\ \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0 \text{ etc.}$$

Soluția III. Remarcăm că $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$ deci ecuația devine:

$$\cos x = 2\sin x \cos x \text{ etc.}$$

II.2.3. $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x.$

$\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x = 8\cos^2 x \sin x \cos 2x$ etc.

$$\cos x = 0,\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ 8 \sin x \cos 2x = 1,$$

$$4 \sin 2x \cos 2x = 1,\ 2 \sin 4x = 1,\ \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

$$4x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}.$$

II.2.4. După eliminarea numitorului și gruparea termenilor, ecuația devine: $\sin x(\cos x - \sin x) = 0$; $(\cos x \neq 0)$.
$\sin x = 0,\ x = k\pi,\ \mathrm{tg}\, x = 1,\ x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}.$

II.2.5. Ecuația se scrie:

$$\mathrm{tg}\, x + \frac{1}{\mathrm{tg}\, x} = \frac{5}{2}.$$

Rezultă $\mathrm{tg}\, x = 2$ și $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{2}$; $x = k\pi + \mathrm{arctg}\, 2$; $x = k\pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}.$

II.2.6. Ecuația se poate scrie:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} = 5\,\mathrm{tg}\, x.$$

Rezultă

$$\mathrm{tg}\, x = 0,\ x = k\pi \text{ și } \mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$$x = k\pi \pm \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

II.2.7. $\sin 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

II.2.8. Ecuația se scrie

$$(\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = 0.$$

Se transformă în produs și se scoate factor comun. Se obține:

$$\cos \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2} = 0, \ x = \frac{\pi}{5} \pm \frac{2k\pi}{5}, \ x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$x = (2k+1)\pi.$$

II.2.9. Transformînd în produs în ambii membri și grupînd, ecuația devine:

$$\sin 4x(\sin 2x - \cos x) = 0 \text{ etc.}$$

I.2.10. Transformînd în produs membrul stîng ecuația se scrie:

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{3x}{2} \cos 5x = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x}{2}\left(\cos \frac{x}{2} - \cos 5x\right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi, \ x = \frac{2k\pi}{3}.$$

$$-2 \sin \frac{11x}{4} \sin \frac{9x}{4} = 0, \ \frac{11x}{4} = k\pi, \quad x = \frac{4k\pi}{11}; \ \frac{9x}{4} = k\pi,$$

$$x = \frac{4k\pi}{9}, \ x \in \left\{\frac{2k\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{4k\pi}{11}\right\} \cup \left\{\frac{4k\pi}{9}\right\}.$$

II.2.11. Împărțind ecuația prin 2 se obține:

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dar $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ și $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ deci $\sin 2x \cos\frac{\pi}{3} +$

$$+ \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{adică} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

deci $2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$; $2x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi - \frac{\pi}{3}$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ etc.

II.2.12. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ și ecuația se scrie:

$$\sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos x = -1; \quad \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x = -1,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ etc.}$$

II.2.13. $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$. Ecuația devine

$$\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = 1; \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Rezultă

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}.$$

II.2.14. $\sin x = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$;

$$3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0;\ (\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)^2 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6};$$

II.2.15. $\sin x = y;\ 4y^2 + 2(\sqrt{3}-1)y - \sqrt{3} = 0.$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x \in \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}.$$

II.2.16. Ecuația se poate scrie:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x.$$

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x.$$

$$\sin 2x(2\cos x + 1) - \cos x(2\cos x + 1) = 0.$$

$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0.$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3};\ 2\sin x\cos x - \cos x = 0.$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0,\ \cos x = 0,\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2};$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

II.2.17. Se poate scrie:

$$(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \frac{2}{3};\ (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{2}{3}.$$

$$2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{3},\quad 4\sin^2 x\cos^2 x = \frac{2}{3}.$$

$$\sin^2 2x = \frac{2}{3},\ \sin 2x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$2x = k\pi \pm \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3},\ x = k\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

II.2.18. Membrul întîi se poate scrie:

$$\frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x} \quad \left(\begin{matrix}\cos 2a \neq -\frac{1}{2} \\ \cos 2a \neq 0\end{matrix}\right).$$

Ecuația se scrie

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x} = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}$$

sau încă: $\dfrac{\cos 2x}{\cos 2a} = \dfrac{1}{2\cos 2a}$. Deci $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$,

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

II.2.19. Ecuația se poate scrie:

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x+a)\cos(x-a)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}.$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi, \quad x = \frac{k\pi}{2}.$$

$$2\cos(x+a)\cos(x-a) = 2\cos 2x;$$

$\cos 2x + \cos 2a = 2\cos 2x$; $\cos 2x = \cos 2a$; $x = k\pi \pm a$.

II.2.20. *Soluția I.* Ecuația se mai poate scrie:

$$\sin x(1 + 2\cos x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \text{ de unde}$$

$\sin \dfrac{x}{2} = 0$, $\dfrac{x}{2} = k\pi$, $x = 2k\pi$; $2\cos^2 \dfrac{x}{2}(1 + 2\cos x) =$

$$= 1 \Rightarrow (1 + 2\cos x)(1 + \cos x) = 1, \cos x = 0,$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Soluția II. Se face substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Soluția III. Se transformă în produs primul membru al ecuației și apoi se notează $\cos\frac{x}{2} = y$.

II.2.21. Ecuația se poate scrie:

$\sin x(1 + \cos x) = 1 - \cos x$ sau $4 \sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}$

de unde rezultă:

$$\sin\frac{x}{2} = 0,\ x = 2k\pi;\ 2\cos^2\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și rezultă ecuația $t^3 + t - 2 = 0$ cu rădăcina $t_1 = 1,\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Ecuația $t^2 + t + 2 = 0$ nu admite rădăcini reale.

II.2.22. Se ține seama de identitatea:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x,$$

apoi se notează $\sin 2x = y$ și se obține: $1 - \frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{2} = 0$. Rădăcina $y_1 = 3$ nu convine. Deci $y_2 = -1$, rădăcina admisă.

II.2.23. Se folosesc formulele:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};\ \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2};$$

$$\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2};\ \sin^2 4x = \frac{1 - \cos 8x}{2}.$$

Se înlocuiesc în ecuație și se transformă apoi sumele în produse.

II.2.24. Se ține seama de formulele:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}, \cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}.$$

Se introduc în ecuație și se transformă sumele în produse. Se notează $\cos 2x = y$ și se obține ecuația $2y^3 + y^2 - - y = 0$, cu $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = -1$.

II.2.25. Ecuația se poate scrie:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x, \ \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= (\sin x + \cos x)\sin x \cos x, \qquad \begin{pmatrix}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{pmatrix};$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\sin x + \cos x)\sin x \cos x = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - \sin x \cos x) = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -1; \ x = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

$$\cos x - \sin x = \sin x \cos x; \ 2(\cos x - \sin x) = \sin 2x;$$

$$4(1 - \sin 2x) = \sin^2 2x; \sin 2x = y \text{ etc.}$$

II.2.26. $(1 - \operatorname{tg} x)\left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) = 1 + \operatorname{tg} x;$

$$\operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 0 \text{ etc.}$$

II.2.27. $\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = k\pi - - \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$.

II.2.28. Ținînd seama de formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, se obține: $\frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x - 3} = |\sin x|$ cu soluțiile: $|\sin x| = 0$; $|\sin x| = \frac{3}{2}$; $|\sin x| = -1$. Cum $|\sin x| \leqslant 1$, convine doar $|\sin x| = 0 \Rightarrow x = k\pi$.

II.2.29. Ținem seama că $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$ și ecuația se scrie:

$$\cos 3x(\cos 3x + 3\cos x) + \sin 3x(3\sin x - \sin 3x) = 0,$$

$$3(\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x = 0,$$

$$3\cos 2x + \cos 6x = 0 \text{ de unde } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

II.2.30. Ecuația se scrie:

$$\operatorname{ctg} 3ax = \sqrt{3} \text{ cu } 2\cos 2ax + 1 \neq 0, \; x = \frac{1}{3a}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right).$$

II.2.31. Relația de condiție se mai poate scrie:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = a(\sin x + \cos x) \text{ de unde}$$

$$\cos x + \sin x = 0 \text{ sau}$$

$$\cos x - \sin x = a \text{ etc.}$$

II.2.32. Ecuația se scrie:

$$\sin 3x = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow \sin 3x - \cos 3x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\operatorname{tg}\frac{3x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{3x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{3x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{3x}{2}} = 1 \text{ etc.}$$

II.2.33. Se ține seama de identitatea:

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

și ecuația se scrie:

$$(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin 3x + \sin x) = 0$$

sau încă $\sin \frac{3x}{2} \sin 2x \sin \frac{5x}{2} \cos x \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ etc.

II.2.34. $(\sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x) \sin^2 x - (\sin^2 x \, 2 \cos^2 x - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2}$; $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x =$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x =$$

$= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ etc.

II.2.35. Ținem seama că $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^2 x)^4 + (\cos^2 x)^4 = \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x$.

Astfel ecuația se scrie:

$$\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + \frac{15}{4} = 0,$$

cu soluțiile:

$$\sin^2 2x = \frac{15}{2} \left(\text{nu convine}\right) \text{ și } \sin^2 2x = \frac{1}{2};$$

de unde $x = k \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8}$.

II.2.36. $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos x \Leftrightarrow \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1$, $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$.

II.2.37. $(\text{tg } x + \text{tg } 4x) + (\text{tg } 2x + \text{tg } 3x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x \cos x(8 \cos^2 x - 9 \cos^2 x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x \cos x(4 \cos^2 2x - \cos^2 x - 1) = 0 \text{ etc.}$$

Am folosit de formulele $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$; $\cos^4 x =$

$= \dfrac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$.

II.2.38. $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$

$= \dfrac{121}{196}$.

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{121}{196}; \ \sin^2 2x = \frac{25}{49} \text{ etc.}$$

II.2.39. Ţinem seama de identităţile:

$$1 - \sin x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2; \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

şi ecuaţia se scrie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| + \text{tg} \frac{x}{2} = 2$$

sau încă

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| 1 - \text{tg} \frac{x}{2} \right| + \text{tg} \frac{x}{2} = 2.$$

Dacă $1 - \text{tg} \dfrac{x}{2} \geqslant 0 \Rightarrow \text{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 + \sqrt{2} > 1$

ceea ce contrazice ipoteza $\text{tg} \dfrac{x}{2} \leqslant 1$.

Dacă $1 - \text{tg}\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left|1 - \text{tg}\frac{x}{2}\right| = -1 + \text{tg}\frac{x}{2}$ și în final $\text{tg}\frac{x}{2} = 3 - \sqrt{2} > 1$ de unde $x = 2k\pi + 2 \text{ arctg } (3 - \sqrt{2})$.

II.2.40. După desfacerea parantezelor și gruparea termenilor ecuația se scrie:

$$(\sin x + \cos x)[(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos x + \sin x] = 0.$$

$\text{tg}\, x = 1$; $\text{tg}^2\frac{x}{2} + \text{tg}\frac{x}{2} = 0$, $\text{tg}\frac{x}{2} = -1$; $\text{tg}\frac{x}{2} = 0$ etc.

II.2.41. Se rezolvă ecuația și se obțin valorile $\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow \Rightarrow x = k\pi$, $\text{tg}\, x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

$\sin x = 0$, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = \pm 1$; $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

II.2.42. Exprimăm pe $\sin x$ şi $\cos x$ în funcție de $\text{tg}\frac{x}{2}$ şi obținem ecuația: $(a + c)\text{tg}^2\frac{x}{2} - 2b\,\text{tg}\frac{x}{2} + c - a = 0$.

Presupunem $c^2 < a^2 + b^2$. Ecuația admite două rădăcini distincte $\text{tg}\frac{x_1}{2}$ și $\text{tg}\frac{x_2}{2}$.

Dar $\text{tg}\frac{x_1}{2} + \text{tg}\frac{x_2}{2} = \frac{2b}{a+c}$.

$\text{tg}\frac{x_1}{2} \cdot \text{tg}\frac{x_2}{2} = \frac{c-a}{a+c}$, $\text{tg}\frac{x_1}{2} - \text{tg}\frac{x_2}{2} = \pm\frac{2\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}$,

$$\text{tg}\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\text{tg}\frac{x_1}{2} + \text{tg}\frac{x_2}{2}}{1 - \text{tg}\frac{x_1}{2}\text{tg}\frac{x_2}{2}} = \frac{b}{a}; \quad \text{tg}\frac{x_1-x_2}{2} = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}.$$

Deci:

$$\sin(x_1 + x_2) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x_1 + x_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2};$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x_1 + x_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2};$$

$$\sin(x_1 - x_2) = \frac{\pm 2c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2};$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}.$$

II.2.43. a) Se efectuează operațiile din membrul întîi și se înlocuiesc $\sin^2 b$ prin $1 - \cos^2 b$ și $\sin^2 c$ prin $1 - \cos^2 c$.

b) $$x_{1,2} = \frac{1 - \cos b \cos c \pm \sqrt{(1 - \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b \sin^2 c}}{\sin^2 b}$$

și ținînd seama de punctul a) rezultă:

$$u = \frac{\sin^2\frac{c}{2}}{\sin^2\frac{b}{2}} \text{ și } v = \frac{\cos^2\frac{c}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

c) $$\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{u} - \sqrt{v}} = \frac{\sin\frac{b + c}{2}}{\sin\frac{c - b}{2}} = -2.$$

II.2.44. a) $x_1 = \operatorname{ctg}\frac{a + b}{4}$; $x_2 = -\operatorname{tg}\frac{a + b}{4}$.

b) $\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{a+b}{4}=2$; $\operatorname{tg}^4\frac{a+b}{4}-2\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{4}+$ $+1=0$; $\operatorname{tg}\frac{a+b}{4}=\pm 1\Rightarrow a+b=(4k\pm 1)\pi$.

II.2.45. $\cos 2x(\cos 2x-1)-\sin 2x(1-\cos 2x)=0$ etc.

II.2.46. Ținînd seama de identitățile: $\sin(\arcsin x)=x$, $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ și de formulele care dau funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu se obține: $\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=$ $=2x\sqrt{1-x^2}$; $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}=\frac{2x}{1-x^2}$.

Deci ecuația dată este echivalentă cu următoarea ecuație:

$$2x\sqrt{1-x^2}=\frac{2x}{1-x^2} \text{ de unde } x=0.$$

II.2.47. Ecuația este echivalentă cu $\operatorname{tg}^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow$ $\Rightarrow x=k\pi$ pentru $n=2k+1$.

II.2.48. Ținînd seama de identitatea: $\arcsin(-x)=$ $=-\arcsin x$ rezultă $2\arcsin x=-\arccos(1-x)$; $2\arcsin x=-\arccos(1-x)$. Egalînd cosinusurile ambilor membri ai ultimei ecuații obținem: $\cos(2\arcsin x)=1-x$; $1-2x^2=1-x$; $x_1=0$; $x_2=\frac{1}{2}$. Se constată că doar x_1 este rădăcină.

II.2.49. Înlocuim $\arccos nx$ cu $\arcsin\sqrt{1-n^2x^2}$ și considerind sinusul ambilor membri ai ecuației rezultă

$$mx=\sqrt{1-n^2x^2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Cazul I: $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$ dar cel puțin unul dintre ei diferit de zero; $x=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Cazul II: $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$ dar cel puțin unul dintre ei diferit de 0; $x = -\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Cazul III: $m > 0$, $n < 0$ (sau $m < 0$, $n > 0$) — în acest caz ecuația nu admite soluții.

II.2.50. Domeniul de definiție: $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Considerind cosinusul ambilor membri ai ecuației se obține:

$\cos(2\arcsin x) = \cos(\arccos 2x)$ sau $1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 2x$.

$$1 - 2x^2 = 2x \text{ de unde } x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

II.2.51. *Soluția I.* Considerăm ca necunoscută $\sin x \cos x = y$ și obținem ecuația: $(3m-2)y^2 + 1 - m = 0$, cu condiția ca $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Soluția II. Notînd $\sin 2x = t$, ecuația se scrie:

$$(3m-2)t^2 + 4(1-m) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \pm 2\sqrt{\frac{m-1}{3m-2}}$$

cu condițiile

$$\frac{4(1-m)}{3m-2} \leqslant 1 \text{ și } \frac{m-1}{3m-2} \geqslant 0.$$

II.2.52. $2m\sin^2 3x - (4-m)\sin 3x - 2 = 0$.

Pentru $m \in (-2, 2)$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$; pentru $m \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, $x_1 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$; $x_2 = \frac{(-1)^k}{3}\arcsin\frac{2}{m} + k\frac{\pi}{3}$.

II.2.53. a) $m\sin^2 x - 2(m+1)\sin x + m + 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x_2 = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{m+2}{m}$; $\left|\frac{m+2}{m}\right| \leqslant 1$.

b) $x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{2}$; $x_2 = (-1)^k \arcsin\left(\sqrt{2}-1\right) + k\pi$.

II.2.54. $\sin x\,[2m^2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) - 4(3m-2)\cos^2 x] = 0$.

$x_1 = k\pi$; $x_2 = 2k\pi \pm \arccos\frac{m}{2(m-1)}$ pentru $m \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ și $x_3 = 2k\pi \pm \arccos\frac{m}{2-m}$ pentru $m \in [-\infty, 1]$.

II.2.55. Dezvoltăm și simplificăm prin $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Obținem:

$$\cos 3x + \sin 3x = m(\cos x - \sin x);$$

$$4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) - m(\cos x - \sin x) = 0;$$

$$(\cos x - \sin x)\,[4(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) - 3 - m] = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4};\ 4\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = m + 3;$$

$$\sin 2x = \frac{m-1}{2}$$

Punem condiția:

$$\left|\frac{m-1}{2}\right| \leqslant 1 \Rightarrow m \in [-1, 3]$$

cu soluțiile:

$$x_2 = k\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{m-1}{2}.$$

$$x_3 = \frac{2k+1}{2}\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{m-1}{2}.$$

II.2.56. Ecuația se mai scrie:

$$(1-a)\cos^2 2x - (5-2a)\cos 2x + 3a + 6 = 0;$$

Notînd $\cos 2x = y$ se obține o ecuație de gradul doi.

$$x = \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a+2}{1-a} + k\pi$$

cu condiția

$$\left|\frac{a+2}{1-a}\right| \leqslant 1.$$

II.2.57. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și ecuația se scrie:

$$3(m+1)t^2 - 2\sqrt{3}\,t + 3(m-1) = 0.$$

Admite rădăcini reale pentru $m \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

II.2.58. a) $2\sin^2 2x - m\sin 2x + m - 2 = 0$, $m \in$ $\in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, admite soluția $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Pentru $m \in [0, 4]$ admite soluțiile $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ și $x_2 = \frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{m-2}{2} + k\frac{\pi}{2}$.

b) $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

II.2.59. Ecuația se mai poate scrie:

$$m\sin^2 x - (2m^2 - m + 1)\sin x + 2m - 1 = 0.$$

Dacă $m = 0$ ecuația este $\sin x + 1 = 0$ și $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Dacă $m \neq 0$ rezultă: Pentru $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{m} + k\pi$; pentru $m \in (-1, 0)$ ecuaţia nu admite soluţii; pentru $m \in (0, 1)$, $x = (-1)^k \arcsin(2m - 1) + k\pi$; pentru $m = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

II.2.60. Se consideră necunoscutele $\cos x$, $\cos y$ şi se obţine:

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ etc.}$$

II.2.61. Din prima ecuaţie rezultă $x + y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$. Se transformă în produs a doua ecuaţie şi rezultă $x = k\frac{3\pi}{2} + (-1)^k \frac{k\pi}{6}$; $\quad y = (-1)^k \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}$, $(k \in Z)$.

II.2.62. $\begin{cases} \cos(x + y) + \cos(x - y) = 1 \\ \dfrac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = 2. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ x + y = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Substituind $x + y$ în prima ecuaţie rezultă

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ x - y = 2l\pi. \end{cases}$$

Deci $\begin{cases} x + y = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ x - y = 2l\pi, \end{cases} \quad k, l \in Z.$

Rezultă $x = (k + l)\pi + \frac{\pi}{4}$, $\quad y = (k - l)\pi + \frac{\pi}{4}$.

II.2.63. Se ridică la pătrat ambele ecuații și se adună membru cu membru. Se obține

$$\sin 2x = 1,$$

$$x_1 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} \text{ etc.}$$

Pentru $\sin 2x = -1$,

$$x_2 = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

II.2.64. Notînd $\arcsin x = u$, $\arcsin y = v$ și înlocuind $\arccos x$ prin $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$, sistemul se scrie:

$$\begin{cases} uv = \dfrac{\pi^2}{12}, \\ uv - (u + v)\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{24}\pi^2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $u_1 = \frac{\pi}{3}$, $v_1 = \frac{\pi}{4}$ și $u_2 = \frac{\pi}{4}$, $v_2 = \frac{\pi}{3}$ deci:

$$\left(x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ și } \left(x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

II.2.65. Se stabilesc condițiile de existență pentru x și y. În aceste condiții sistemul considerat este echivalent cu următorul sistem

$$\begin{cases} \sqrt{1 - y^2} = -x \\ x + y = \dfrac{2k}{3}\,;\ (k = 0,\ \pm 1) \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{6},\ y_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{6};$$

$$x_3 = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6},\ y_3 = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}.$$

II.2.66. Inecuația se poate scrie:

$(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1) < 0.$

Semnul este dat de produsul semnelor fiecărui factor.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 1$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$	
$\sqrt{2}\cos x - 1$		$+$		$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\sqrt{2}\cos x + 1$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
P		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Se mai poate rezolva scriind inecuația sub forma

$$(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 1)\cos 2x < 0.$$

II.2.67. $\mathrm{tg}\, x\,(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x)\,(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x)\,(\sqrt{3} + \mathrm{tg}\, x)\,(\sqrt{3} - \mathrm{tg}\, x) > 0$, $\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

II.2.68. $\dfrac{\cos 2x + \cos x - 1 - 2\cos 2x}{\cos 2x} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x - \cos x + 1}{\cos 2x} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x(2\cos x - 1)}{2\cos^2 x - 1} < 0.$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\cos x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2\cos x - 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\cos^2 x - 1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\cos x(2\cos x - 1)}{2\cos^2 x - 1}$		$+$	ǀ	$-$	0	$+$	0	$-$	ǀ	$+$	ǀ	$-$	0	$+$	0	$-$	ǀ	$+$	

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right).$$

II.2.69. Notăm $\sin x = t$ unde $-1 \leqslant t \leqslant 1$ și deci avem de rezolvat sistemul $\begin{cases} t^2 + 2t - 1 > 0 \\ -1 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

Rezultă

$$t \in (-1 + \sqrt{2},\ 1) \Rightarrow -1 + \sqrt{2} \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

II.2.70. $\dfrac{-2\cos^2 x + \cos x + 1}{4\cos^2 x - 3} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-2\cos^2 x + \cos x + 1)(4\cos^2 x - 3) > 0.$$

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

II.2.71. $8\cos^2 x - 2\sqrt{6} < 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x - 3\sqrt{6} < 0.$

Inecuația de mai sus este echivalentă cu inecuația dată, deoarece $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} > 0.$

II.2.72. $\dfrac{2\sin^2 x + 2\sin^2 x - 1}{2\sin^2 x - 1} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) > 0.$

x	$0°$		$30°$		$45°$		$90°$		$135°$		$150°$		$210°$		$225°$		$315°$		$330°$		$360°$
$4\sin^2 x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$			|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2\sin^2 x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$			0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
P		$+$	0	$-$	|	$+$			|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	|	$-$	0	$+$	

$x \in (0°, 30°) \cup (45°, 135°) \cup (150°, 210°) \cup (225°, 315°) \cup$
$\cup (330°, 360°).$

II.2.73. $E = \dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \geqslant 0.$ Perioada este π deci

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
E		$-$	|	$+$	0	$-$	

$$x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4} + k\pi\right),\ k \in Z.$$

II.2.74. *Soluția I.* $1-\cos x+\sin x<0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}<0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{x}{2}\right)<0 \Rightarrow x\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right).$$

Soluția II. Se reprezintă grafic $f(x)=\cos x-\sin x-1$ și din graficul respectiv se vor lua valorile lui x pentru care $f(x)>0$.

II.2.75. $2\cos^2 x-1+\sin 2x\leqslant 0 \Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x\leqslant 0$ sau $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin 2x\leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\leqslant 0$ de unde $x\in\left[\frac{3\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}\right]$.

II.2.76. $$\frac{-2\cos^2 x+\cos x}{\cos 2x}>0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(1-2\cos x)}{\cos 2x}>0.$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\cos x$		+		+		+	0	−		−		−	0	+		+		+	
$\cos 2x$		+	0	−		−		−	0	+	0	−		−		−	0	+	
$1-2\cos x$		−		−	0	+		+		+		+		+	0	+		−	
E		−	|	+	0	−	0	+	|	−	|	+	0	−	0	+	|	−	

$$x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{4}\right).$$

II.2.77. $x\in\left(3k\pi,\ 3k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(3k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 3k\pi+\frac{5\pi}{2}\right).$

II.2.78. Inecuația este echivalentă cu $\cos 4x > \frac{1}{2}$.

$$x \in \left(k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right).$$

II.2.79. Se rezolvă inecuația echivalentă: $\frac{1 - \sin x}{\sin x} > 0$,

$$x \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right).$$

II.2.80. Se rezolvă inecuația echivalentă: $\frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x(1 - \operatorname{tg} x)} > 0$,

$$x \in \left(k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

II.2.81. Se pun condițiile $-1 \leqslant 2x - 1 \leqslant 1$ și $-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ și se găsește domeniul de definiție $x \in [0, 1]$. Notînd cu $y_1 = \arcsin(2x - 1)$ și cu $y_2 = \arcsin(1 - x)$, reprezentînd grafic cele două funcții rezultă $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

II.2.82. Deoarece $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ inecuația se scrie $\arcsin x \geqslant \frac{\pi}{4}$. Dar $\arcsin x$ este definit pentru $x \in [-1, 1]$ și este strict crescătoare pe domeniul său de definiție. Deci $\sin\frac{\pi}{4} < x \leqslant \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

II.2.83. $-1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ și în același timp $x^2 - 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3 > 0$ cu $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$.

Soluția inecuației este: $x \in \left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right]$.

II.3. NUMERE COMPLEXE SCRISE SUB FORMA TRIGONOMETRICĂ.

Exerciţii şi probleme

II.3.1. Să se calculeze:

$$3(i-3)+\frac{12}{i-3}+\frac{1}{i-2}+\frac{1}{i-1}+i+\frac{1}{i+1}+\frac{2-i}{5}$$

II.3.2. Fie ecuaţia $x^3-1=0$

a) Să se rezolve ecuaţia;

b) Notînd cu α una din rădăcinile complexe ale acestei ecuaţii (rădăcina cubică a unităţii) să se demonstreze identităţile:

$$(x\alpha+y\alpha^2)(x\alpha^2+y\alpha)=x^2-xy+y^2;$$

$$(x+y+z)(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\alpha^2 y+\alpha z)=$$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

II.3.3. Fie expresia $E(z)=\dfrac{iz^2-z+i}{2z-i}$. Să se calculeze valoarea acestei expresii pentru $z=a+bi$, punînd rezultatul sub forma:

$$E(a+bi)=P(a,\ b)+iQ(a,\ b)$$

II.3.4. Dacă notăm cu $z=a+bi$ şi cu $\bar{z}=a-bi$ conjugatul lui z, să se determine z ştiind că:

a) $z^2=\bar{z}$,

b) $\bar{z}=z^3-2z+2$.

II.3.5. a) Să se determine mulțimea:

$$A = \{x \in C \mid x^2 + x + 1 = 0\}.$$

b) Să se calculeze valoarea lui $E(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x + 1}$ pentru fiecare element al mulțimii A.

Pentru ce valori reale ale lui x și y există egalitățile:

II.3.6. $(x^2 - y^2)\mathrm{i} + x + y = 3(\mathrm{i} + 1)$.

II.3.7. $x^2 - 10 + \mathrm{i}\, y^2 - 15\,\mathrm{i} = -\,xy - \mathrm{i}\, xy$.

II.3.8. $\dfrac{x + y}{x - y} + \mathrm{i}x^2 + \mathrm{i}y^2 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{y - x}{x + y} + 90\mathrm{i}$.

II.3.9. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 1 - \mathrm{i}, \text{ pentru } z = 1 + \mathrm{i}.$$

II.3.10. Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

a) $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$,

b) $z_2 = 1 - \mathrm{i}$,

c) $z_3 = -\sqrt{3} + 1$,

d) $z_4 = -1 - \mathrm{i}$.

II.3.11. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

a) $z_1 = 1$; b) $z_2 = -1$; c) $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $z_4 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$; e) $z_5 = 2 + 3\mathrm{i}$; f) $z_6 = (1 + \mathrm{i})^2$;

g) $z_7 = \left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)^2$; h) $z_8 = \left(\dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)^2$.

II.3.12.* Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

a) $z_1 = \cos\alpha + \sin\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha)$,

b) $z_2 = \sin\alpha + i(1 + \cos\alpha)$,

c) $z_3 = \dfrac{2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha - i(1 - \mathrm{tg}\,\alpha)}$. $\qquad \alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

II.3.13.* Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

a) $z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$,

b) $z_2 = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha + 2i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$

c) $z_3 = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha - 2i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$, $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

II.3.14. Să se arate că numerele complexe z, de forma $z = \dfrac{1 - ai}{1 + ai}$, $a \in R$, sînt numere complexe de modul egal cu 1.

II.3.15. Să se determine unghiul α, astfel încît expresia; $E = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)$ să aibă o valoare reală.

II.3.16. Știind că $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$, să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

II.3.17. Știind că $z + \dfrac{1}{z} = 2\sin\alpha$, să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

II.3.18. Să se scrie sub formă restrînsă expresia: $E = (\cos x + i\sin x)[\cos(x + h) + i\sin(x + h)][\cos(x + 2h) + i\sin(x + 2h)][\cos(x + 3h) + i\sin(x + 3h)]$.

Să se calculeze:

II.3.19. $E_1 = (\sqrt{3} + i)^{120}$.

II.3.20. $E_2 = (-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

II.3.21. $E_3 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3})}{2}\right)^n$.

II.3.22. $E_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^9$.

II.3.23. $E_5 = \left[\frac{\sin\alpha - i(1 + \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}\right]^n +$

$$+ \left[\frac{\sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)}{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}\right]^n.$$

II.3.24. Să se calculeze rădăcinile cubice ale unității.

II.3.25. Să se calculeze:

a) $\sqrt{i}$; b) $\sqrt[6]{-i}$; c) $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$; d) $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$;
e) $\sqrt[5]{1 + i}$; f) $\sqrt[5]{1 - i}$.

Să se rezolve ecuațiile:

II.3.26. $z^3 + i = 0$.

II.3.27. $z^4 + 1 = 0$.

II.3.28. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

II.3.29. $z^8 + (1 - i) z^4 - i = 0$.

II.3.30. $z^4 + 6(1 + i) z^2 + 5 + 6i = 0$.

II.3.31. Să se calculeze: $\sin 7x$; $\cos 7x$; $\operatorname{tg} 7x$; $\operatorname{ctg} 7x$, în funcție de funcțiile trigonometrice ale arcului x.

Să se rezolve următoarele ecuații:

II.3.32.* $(x + 1)^n - (x - 1)^n = 0$.

II.3.33. $(x + i)^n + (x - i)^n = 0$.

II.3.34. $(x + i\sqrt{1 - x^2})^n - (x - i\sqrt{1 - x^2})^n = 0$.

II.3.35. $(1 + \mathrm{i}x)^n - (1 - \mathrm{i}x)^n = 0.$

II.3.36. $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n = 0.$

II.3.37. $\left(\dfrac{1 + x\mathrm{i}}{1 - x\mathrm{i}}\right)^n = \dfrac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$

Să se demonstreze următoarele formule:

II.3.38.* $\cos^{2m}\alpha = \dfrac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)\alpha + \dfrac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m.$

II.3.39.* $\cos^{2m+1}\alpha = \dfrac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m - 2k + 1)\alpha.$

II.3.40.* $\cos x + \cos(x + h) + \ldots + \cos[x + (n-1)h] =$

$$= \frac{\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}} \cos\left[x + \frac{(n-1)h}{2}\right].$$

II.3.41.* $\sin x + \sin(x + h) + \ldots + \sin(x + (n-1)h) =$

$$= \frac{\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}} \cdot \sin\left[x + \frac{(n-1)h}{2}\right].$$

II.3.42.* $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x =$

$$= \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\frac{(n+2)x}{2}.$$

II.3.43.* $\sin x + C_n^1 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin(n+1)x =$

$$= \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \sin\frac{(n+2)x}{2}.$$

II.3. SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

II.3.1. Se amplifică fiecare fracție cu conjugatul numitorului.

II.3.2. a) $(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

b) Pentru demonstrarea identităților se introduce în membrul stîng $\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ și după efectuarea calculelor se ajunge la membrul drept.

II.3.3. Înlocuind în $E(z)$ pe $z = a + bi$ se obține:

$$E(a+bi) = \frac{-2a^2b-2b^3-b^2+3b-3a^2}{4a^2+(2b-1)^2} + i\frac{2a^3+2ab^2+2ab+a}{4a^2+(2b-1)^2}.$$

II.3.4. a) $a=0, \quad b=0; \quad a=1, \quad b=0; \quad a=-\frac{1}{2},$ $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) $a=1, \ b=0; \ a=-2, \ b=0; \ a=1, \ b=\pm\sqrt{2}.$

II.3.5. $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \ x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$ adică tocmai rădăcinile cubice ale unității.

$\alpha^4 = \alpha, \ \alpha^3 = 1, \ E = \frac{0}{2} = 0.$

II.3.6. Se scriu ambii membri sub forma $a + bi$. Pentru ca două numere complexe să fie egale trebuie ca partea reală a unuia, să fie egală cu partea reală a celuilalt și coeficienții părților imaginare să fie egali. Se obține un sistem cu soluția: (2, 1).

II.3.7. Revine la a rezolva sistemul: $\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$ cu soluțiile: (2, 3), (−2, −3).

II.3.8. Revine la a rezolva sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$$

cu soluțiile: (9, 3), (−9, −3).

II.3.9. Se înlocuiește $z = 1 + i$ și se obține $E(1+i) = -1-i$.

II.3.10. a) $\rho = \sqrt{3+1} = 2$; $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30°$

Deci $z_1 = 2(\cos 30° + i \sin 30°)$.

b) $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{7\pi}{4}$.

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right) \text{ sau } z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

c) $\rho = 2$; $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2(\cos 150° + i \sin 150°)$.

d) $\rho = \sqrt{2}$; $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha =$
$= 225° \Rightarrow z = \sqrt{2}\,(\cos 225° + i\sin 225°)$.

II.3.11. a) $z_1 = \cos 0° + i\sin 0°$.

b) $z_2 = \cos\pi + i\sin\pi$.

c) $z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

d) $z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

e) $z_5 = \sqrt{13}\,(\cos 56°19'25'' + i\sin 56°19'25'')$

f) $z_6 = (1 + 2i + i^2) = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

g) $z_7 = \cos\pi + i\sin\pi$.

h) $z_8 = \cos\pi + i\sin\pi$.

II.3.12. a) $\rho = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \sqrt{2}$.

$$\cos\theta = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha}{\sqrt{2}} =$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

Deci $\theta = \alpha - \frac{\pi}{4}$.

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

b) $z_2 = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\frac{\pi - \alpha}{2} + i\sin\frac{\pi - \alpha}{2}\right)$

c) $\rho = \sqrt{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2} = \sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{|\cos\alpha|}$.

$\cos\theta = \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)|\cos\alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

$\sin\theta = \frac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Dacă $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $|\cos\alpha| = \cos\alpha$ și atunci

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

Deci $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

Dacă $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ și deci $\alpha = \frac{5\pi}{4} - \alpha$.

Deci $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

În final: $z_3 =$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right] \text{ dacă } \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ -\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)\right] \text{ dacă } \alpha\in\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right). \end{cases}$$

II.3.13. a) $z_1 = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

b) $z_2 = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

c) $z_3 = \cos(2\pi - 2\alpha) + i\sin(2\pi - 2\alpha)$.

II.3.14. $z = \frac{(1-ai)^2}{(1+ai)(1-ai)} = \frac{1-a^2-2ai}{1+a^2}$.

Notăm $a = \operatorname{tg}\theta$ și $z = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta - 2i\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$

dar

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \Rightarrow z = \cos 2\theta - i \sin 2\theta.$$

Deci $|z| = 1$.

II.3.15. $E = [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)] \cdot [\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha] = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha$.

Pentru ca E să fie reală trebuie să avem $\sin 4\alpha = 0$ deci $4\alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{4}$.

II.3.16. $z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$

$$z_{1,2} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

$$\frac{1}{z_{1,2}} = \cos \alpha \mp i \sin \alpha$$

$$z^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$$

$\frac{1}{z^n} = \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha$. Adunînd cele două relații rezultă

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha.$$

II.3.17. $z^n + \frac{1}{z^n} = -2 \sin n\alpha$.

II.3.18. $E = (\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x)(\cos h + i \sin h)(\cos x + i \sin x)(\cos 2h + i \sin 2h)(\cos x + i \sin x)(\cos 3h + i \sin 3h) = (\cos x + i \sin x)^4 (\cos h + i \sin h)(\cos h + i \sin h)^2 (\cos h + i \sin h)^3 = (\cos x + i \sin x)^4 (\cos h + i \sin h)^6 = (\cos 4x + i \sin 4x)(\cos 6h + i \sin 6h) = \cos(4x + 6h) + i \sin(4x + 6h)$.

II.3.19. $E_1 = (\sqrt{3}+i)^{120} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{120} = 2^{120}.$

II.3.20. $E_2 = 2^{60}.$

II.3.21. Observăm că $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$

$\overline{\alpha} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ sînt rădăcinile cubice ale unității.

Pentru $n = 3k$; $E_3 = 2$; pentru $n = 3k+1$, $E_3 = -1$; pentru $n = 3k+2$, $E_3 = -1$.

II.3.22. $E_4 = \cos 15\pi + i\sin 15\pi = -1.$

II.3.23. $E_5 = 2\cos n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$

II.3.24. $1 + 0i = \cos 0° + i\sin 0°.$

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0° + i\sin 0°} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Pentru $k = 0$, $\alpha_1 = \cos 0° + i\sin 0° = 1.$

Pentru $k = 1$, $\alpha_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

Pentru $k = 2$, $\alpha_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

II.3.25. a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$

b) $z = \sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{\cos 270° + i\sin 270°}.$

$$z = \cos\frac{360°k + 270°}{6} + i\sin\frac{360°k + 270°}{6}.$$

Pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ în

$z = \cos(60°k + 45°) + i \sin(60°k + 45°)$ se obține:

$$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6.$$

c) $z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$ avem:

$$k = 0,\ z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)$$

$$k = 1,\ z_2 = iz_1;$$

$$k = 2,\ z_3 = -z_1;\ k = 3,\ z_4 = -iz_1.$$

d) $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right).$

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{11\pi}{6}}{4} + i \sin\frac{2k\pi + \frac{11}{6}}{4}\right).$$

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$, avem respectiv:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24} + i \sin\frac{11\pi}{24}\right).$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24} + i \sin\frac{23\pi}{24}\right).$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i \sin\frac{35\pi}{24}\right).$$

$$z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{24} + i \sin\frac{47\pi}{24}\right).$$

e) $$z_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i \sin\frac{\pi}{20}\right).$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i \sin\frac{9\pi}{20}\right).$$

$$z_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right).$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

$$z_5 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right).$$

f) $1 - i = 2\ (\cos 315° + i \sin 315°)$.

$$z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{360°k + 315°}{5} + i\sin\frac{360°k + 315°}{5}\right).$$

Pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4,$ avem respectiv:

$$z_1 = \sqrt[10]{2}\ (\cos 63° + i \sin 63°).$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2}\ (\cos 135° + i \sin 135°).$$

$$z_3 = \sqrt[10]{2}\ (\cos 207° + i \sin 207°).$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2}\ (\cos 279° + i \sin 279°).$$

$$z_5 = \sqrt[10]{2}\ (\cos 351° + i \sin 351°).$$

II.3.26.

Soluția I. $z^3 + i = z^3 - i^3 = (z - i)\ (z^2 + iz + i^2) = 0.$

$$z_1 = i; \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}; \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Soluția II. $z = \sqrt[3]{-i}$.

II.3.27. *Soluția I:* $z^4 + 1 = z^4 + 1 + 2z^2 - 2z^2 =$
$= (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1) \cdot (z^2 - \sqrt{2}z + 1) = 0.$

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i); \quad z_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).$$

Soluția II:

$$z = \sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}.$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

II.3.28. Notăm $z^3 = u$ și ecuația se scrie: $u^2 - 9u + 8 = 0.$

Rezultă:

$$u_1 = 1, \; u_2 = 8.$$

Deci această ecuație revine la a rezolva ecuațiile:

$$z^3 - 1 = 0,$$

$$z^3 - 8 = 0.$$

$$z = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2.),$$

respectiv $z = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2),$

deci $z_1 = 1, \; z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \; z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \; z_4 = 2;$

$$z_5 = -1 + i\sqrt{3}; \; z_6 = -1 - i\sqrt{3}.$$

II.3.29. Notăm $z^4 = v$. Obținem:

$$v^2 + (1 - i)\,v - i = 0$$

cu rădăcinile

$$v_{1,2} = \frac{i - 1 \pm \sqrt{2i}}{2}.$$

Dar, $\sqrt{2i} = 1 + i \Rightarrow v_1 = -1; \; v_2 = i.$

Deci rezolvarea ecuației revine la rezolvarea ecuațiilor $z^4 + 1 = 0; \; z^4 - i = 0$ cu rădăcinile:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \; z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i), \; z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i),$$

$$z_5 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$

$$z_6 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),$$

$$z_7 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$

$$z_8 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

II.3.30. $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4} = \pm (1 + 2i)$.

II.3.31. $(\cos x + i \sin x)^7 = \cos 7x + i \sin 7x$
$(\cos x + i \sin x)^7 = \cos^7 x + C_7^1 i \cos^6 x \sin x + C_7^2 i^2 \cos^5 x \cdot \sin^2 x + C_7^3 i^3 \cos^4 x \sin^3 x + C_7^4 i^4 \cos^3 x \sin^4 x + C_7^5 i^5 \cos^2 x \cdot \sin^5 x + C_7^6 i^6 \cos x \sin^6 x + C_7^7 i^7 \sin^7 x$.

Două numere complexe sînt egale dacă părțile reale sînt egale și coeficienții părților imaginare sînt respectiv egali.

Rezultă:

$$\cos 7x = 64 \cos^7 x - 112 \cos^5 x + 56 \cos^3 x - 7 \cos x;$$

$$\sin 7x = 7 \sin x - 56 \sin^3 x + 112 \sin^5 x - 64 \sin^7 x;$$

$$\operatorname{tg} 7x = \frac{7 \operatorname{tg} x - 35 \operatorname{tg}^3 x + 21 \operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg}^7 x}{1 - 21 \operatorname{tg}^2 x + 35 \operatorname{tg}^4 x - 7 \operatorname{tg}^6 x}.$$

II.3.32. $(x + 1)^n - (x - 1)^n = 0,\ x \neq 1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = \sqrt[n]{1}.$

$$\frac{x+1}{x-1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n};\ k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

$$x = \frac{\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} + 1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} - 1}.$$

Considerînd relațiile: $\cos\alpha + 1 = 2\cos\frac{2\alpha}{2}$;

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha - 1 = -2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

rezultă:

$$x = \frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n} + 2\,\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{-2\sin^2\frac{k\pi}{n} + 2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)} = -\mathrm{i}\,\mathrm{ctg}\frac{k\pi}{n};$$

$$k = 0, 1, \ldots, \ n-1.$$

Deci rădăcinile sînt imaginare.

II.3.33. $x_k = \mathrm{ctg}\,\frac{(2k+1)\pi}{2n}$; $k = 0, \ldots, n-1$.

Rădăcinile sînt reale.

II.3.34. $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$; $k = 0, \ldots, n-1$.

II.3.35. $x_k = \mathrm{tg}\, k\pi$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

II.3.36. $x_k = \dfrac{1 + \cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

II.3.37. $\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} = \sqrt[n]{\frac{\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha}{\cos(-\alpha) + \mathrm{i}\sin(-\alpha)}} =$

$$= 2\cos\frac{2\alpha + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\alpha + 2k\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} + \mathrm{i}\frac{2x}{1+x^2} =$$

$$= \cos 2\frac{k\pi + \alpha}{n} + \mathrm{i}\sin 2\frac{k\pi+\alpha}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \cos\dfrac{2k\pi + 2\alpha}{n} \\ \dfrac{2x}{1+x^2} = \sin\dfrac{2k\pi + 2\alpha}{n} \end{cases} \Rightarrow x_k = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha + k\pi}{n};$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

II.3.38. Notăm $z = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$.

$$\frac{1}{z} = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Din formula lui Moivre rezultă:

$$z^k = \cos k\alpha + \mathrm{i}\sin k\alpha;\ \frac{1}{z^k} = \cos k\alpha - \mathrm{i}\sin k\alpha \Rightarrow \cos k\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right).$$

Deci

$$\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}\left(z^{2m} + C_{2m}^1 z^{2m-2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + C_{2m}^{m-1} z^2 + C_{2m}^m + C_{2m}^{m+1}\frac{1}{z^2} + \ldots + C_{2m}^{2m-1}\frac{1}{z^{2m-2}} + C_{2m}^{2m}\frac{1}{z^{2m}}\right).$$

Ținînd seama de $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow \cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}\left[\left(z^{2m} + \right.\right.$

$$\left.\left. + \frac{1}{z^{2m}}\right) + C_{2m}^1\left(z^{2m-2} + \frac{1}{z^{2m-2}}\right) + \ldots + C_{2m}^{m-1}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + C_{2m}^m\right]$$

sau ţinînd seama de $\cos k\alpha = \frac{1}{2}\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)$ rezultă:

$$\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}[2\cos 2m\alpha + 2C_{2m}^1 \cos 2(m-1)\alpha + \dots +$$

$+ 2C_{2m}^{m-1}\cos 2\alpha + C_{2m}^m]$ adică

$$\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)\alpha + \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^m.$$

II.3.39. Ridicînd relaţia $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ la puterea $2m+1$ obţinem:

$$\cos^{2m+1}\alpha = \frac{1}{2^{2m+1}}\left(z^{2m+1} + C_{2m+1}^1 z^{2m-1} + \dots + C_{2m+1}^{2m}\frac{1}{z^{2m-1}} +\right.$$

$\left. + C_{2m+1}^{2m+1}\frac{1}{z^{2m+1}}\right)$. Ţinînd seama de relaţia $\cos k\alpha = \frac{1}{2}\left(z^k +\right.$ $\left.+ \frac{1}{z^k}\right)$ rezultă $\cos^{2m+1}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)\alpha$.

II.3.40. şi **II.3.41.** Notăm $S = \cos x + \cos(x+h) + \dots + \cos[x+(n-1)h]$ şi $T = \sin x + \sin(x+h) + \dots + \sin[x+(n-1)h]$.

$S + \mathrm{i}T = \cos + \mathrm{i}\sin x + \cos(x+h) + \mathrm{i}\sin(x+h) + \cos(x+2h) + \mathrm{i}\sin(x+2h) + \dots + \cos[x+(n-1)h] + \mathrm{i}\sin[x+(n-1)h] = (\cos x + \mathrm{i}\sin x) + (\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot(\cos h + \mathrm{i}\sin h) + (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos h + \mathrm{i}\sin h)^2 + \dots + (\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot(\cos h + \mathrm{i}\sin h)^{n-1}$.

Notînd $z = \cos h + \mathrm{i}\sin h$ rezultă

$$S + \mathrm{i}T = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(1 + z + \dots + z^{n-1});$$

Folosind formula: $1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ rezultă:

$$S + iT = (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{\cos nh + i \sin nh - 1}{\cos h + i \sin h - 1} =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{nh}{2} + 2i \sin \frac{nh}{2} \cos \frac{nh}{2}}{-2 \sin^2 \frac{h}{2} + 2i \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}} =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{2i \sin \frac{nh}{2}\left(\cos \frac{nh}{2} + i \sin \frac{nh}{2}\right)}{2i \sin \frac{h}{2}\left(\cos \frac{h}{2} + i \sin \frac{h}{2}\right)} =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \frac{\sin nh}{\sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{n-1}{2} h + i \sin \frac{n-1}{2} h\right).$$ Deci

$$S + iT = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\cos \left(x + \frac{n-1}{2} h\right) + i \sin \left(x + \frac{n-1}{2} h\right)\right].$$

Egalînd partea reală cu S și coeficientul părții imaginare cu T rezultă sumele cerute.

II.3.42. și **II.3.43.** Notăm $z = \cos x + i \sin x$. Cu suma de la **II.3.42** și suma de la **II.3.43** obținem:
$S + iT = z + C_n^1 z^2 + \ldots + C_n^n z^{n+1}$. Ținînd seama de binomul lui Newton $S + iT = z(1 + z)^n$ adică
$S + iT = (\cos x + i \sin x) \cdot (1 + \cos x + i \sin x)^n =$
$= (\cos x + i \sin x) \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right)$ fiindcă
$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. Deci $S +$
$+ iT = \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \left(\cos \frac{n+2}{2} x + i \sin \frac{n+2}{2} x\right)$. Deci $S =$
$= \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \cdot \cos \frac{n+2}{2} x$. $T = \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \sin \frac{n+2}{2} x$.

II.4. APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Exerciții și probleme

II.4.1. Într-un triunghi ABC, $A = 45°$ și $b = 4$, $c = \sqrt{2}$ Să se calculeze fără tabele sin B, cos B, sin C, cos C.

II.4.2. Să se calculeze unghiurile și latura necunoscută dintr-un triunghi știind că: $C = 18°$, $a = 4 + \sqrt{80}$, $c = 4$.

II.4.3. Să se calculeze unghiurile și latura necunoscută din triunghiul ABC știind că $A = 15°$, $a = 4$, $b = 4 + \sqrt{48}$.

II.4.4. Să se calculeze fără tabele latura a și sin A, sin B, cos A, cos B știind că $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, $C = 60°$.

II.4.5. Laturile a, b, c, ale unui triunghi satisfac relațiile: $a = \frac{7}{3}c$, $b = \frac{8}{3}c$. Să se calculeze $\text{tg}\,\frac{A}{2}$ și să se deducă valoarea unghiului A.

II.4.6. Să se determine unghiurile unui triunghi știind că laturile sînt proporționale cu numerele 2, $\sqrt{6}$ și $1 + \sqrt{3}$.

II.4.7. Într-un triunghi laturile sînt $a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$, $c = x^2 - 1$, unde x este un număr mai mare decît 1. Să se calculeze unghiul A.

II.4.8. Să se calculeze, fără tabele, unghiurile, aria și raza cercului circumscris unui triunghi, știind că laturile sale sînt: $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

II.4.9. Să se calculeze cele trei laturi ale unui triunghi, știind că sînt exprimate prin trei numere întregi consecutive și că unghiul cel mai mare este dublul unghiului cel mai mic.

II.4.10. Să se calculeze baza și unghiurile unui triunghi isoscel, știind că laturile egale sînt de 2 m iar aria este de 1 m^2.

Identități într-un triunghi

II.4.11. Să se verifice că într-un triunghi dreptunghic există relațiile:

a) $\sin 2B = \frac{2bc}{a^2}$;

b) $\sin B \operatorname{tg} B = \frac{b^2}{ac}$;

c) $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$,

d) $\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \operatorname{tg} B$;

e) $\operatorname{cosec} B + \operatorname{ctg} B = \frac{a+c}{b} = \frac{b}{a-c}$;

f) $\sec 2B + \operatorname{tg} 2B = \frac{c+b}{c-b}$.

Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relațiile:

II.4.12. $$\frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{2a(b-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

II.4.13. $$\frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2a(b-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

II.4.14. $\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}$.

II.4.15. $\operatorname{tg} \frac{B+C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare există relațiile:

II.4.16. $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$.

II.4.17. $b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$.

II.4.18. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cdot \cos C + 1 = 0$.

II.4.19. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 2$.

II.4.20. $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{2 \cos A \cos B \cos C}$.

II.4.21. $a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0$

II.4.22.

$$\frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin (A-B)}{\sin A + \sin B} = 0.$$

II.4.23.

$$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = 0.$$

II.4.24. $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

II.4.25. $\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{p^2}{abc}$.

II.4.26. $b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = c \cos^2 \frac{A}{2} + a \cos^2 \frac{C}{2} =$
$= a \cos^2 \frac{B}{2} + b \cos^2 \frac{A}{2}.$

II.4.27.

$$(b + c) \sin^2 \frac{A}{2} + (c + a) \sin^2 \frac{B}{2} + (a + b) \sin^2 \frac{C}{2} = p.$$

II.4.28. $1 + \cos A \cos (B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}.$

II.4.29. $a^2 = b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C).$

II.4.30. Dacă laturile unui triunghi verifică relația $2a^2 =$ $= b^2 + c^2$ atunci:

a) Unghiul A este mai mic de 60°.
b) Există relația $\cos 2A + \cos A \cos (B - C) = 0$.

II.4.31. Dacă între laturile unui triunghi există relația $2a = b + c$, să se arate că:

$$2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B - C}{2}.$$

II.4.32. Să se arate că triunghiul în care $c^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} =$ $= 4S$ este isoscel.

II.4.33. Să se arate că dacă între elementele unui triunghi există relația $b\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{B}{2}\right) = c\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right)$, atunci triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

II.4.34. Să se demonstreze trigonometric că triunghiul ABC în care $2a = b + c$ și $2A = B + C$ este echilateral.

II.4.35. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi avem relația:

$$\sin A + \sin C = 2 \sin B, \text{ atunci}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

II.4. SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

II.4.1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a = \sqrt{10}$;

$$\frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{\sqrt{2}} = \frac{\sin A}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} \Rightarrow \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}\text{; } \sin C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\text{; } \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{; } \cos C = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

II.4.2. $\sin A = \frac{a}{c} \sin C = (1 + \sqrt{5}) \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 1 \Rightarrow A = 90°$ și $B = 72°$ $b^2 = a^2 - c^2 = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

II.4.3. $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{1}{4}(4 + \sqrt{48}) \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45°$ și $C = 120°$ sau $B = 135°$ și $C = 30°$. Cînd $B = 45°$ avem: $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1)} = 2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)$.

Dacă $B = 135° \Rightarrow c = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$.

II.4.4. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 3 = 2 + a^2 - 2a\sqrt{2}\,\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - \sqrt{2}a - 1 = 0$; $a = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$;

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ devine $\frac{2 \sin A}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{\sin B}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$;

$$\sin A = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6}); \cos A = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$\sin B = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ expresii ce corespund unghiurilor $A = 75°$ și $B = 45°$.

II.4.5. *Soluția I.* $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ unde $p = 3c$ $p - a = \frac{2c}{3}$, $p - b = \frac{c}{3}$ și $p - c = 2c \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A = 60°$.

Soluția II. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60° \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

II.4.6. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + (1 + \sqrt{3})^2 - 4}{2(1 + \sqrt{3})\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ deci $A = 45°$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ deci $B = 60°$. $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $C = 75°$.

II.4.7. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos A \Rightarrow A = 120°$.

II.4.8.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16} -$$

$-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}\cos A \Leftrightarrow 1 = 2+\sqrt{3}-2(1+$
$+\sqrt{3})\cos A \Leftrightarrow 2(1+\sqrt{3})\cos A = 1+\sqrt{3} \Rightarrow \cos A =$
$=\frac{1}{2} \Rightarrow A = 60°.\ \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow B = 45°$ și $C = 75°.$

$$S = \frac{bc \sin A}{2}.$$ În cazul nostru

$$S = \frac{3+\sqrt{3}}{16};\ 2R = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

II.4.9. Fie $x-1$, x și $x+1$ laturile triunghiului. Notăm cu α unghiul cel mai mic, 2α unghiul cel mai mare.

$$\frac{x-1}{\sin\alpha} = \frac{x+1}{\sin 2\alpha};\ \frac{x-1}{\sin\alpha} = \frac{x+1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\ \cos\alpha = \frac{x+1}{2(x-1)}.$$

Conform teoremei cosinusului rezultă: $(x-1^2) = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\cos\alpha \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2 - x\frac{(x+1)^2}{x-1}$ sau $(x-1)^3 = x^2(x-1) - (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$. Valoarea 0 nu convine deci $x = 5$. Laturile sînt 4, 5 și 6.

II.4.10. Fie x semibaza. Avem $2x \sin\alpha = 2\sin\beta = 1$, unde cu α au fost notate unghiurile egale, iar cu β celălalt unghi.

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30° \text{ sau } \beta = 150°;\ \alpha = 90° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\frac{\beta}{2} \text{ și } x = \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}};\ \cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+$$

$$+\sqrt{2}) \Rightarrow \frac{\beta}{2} = 75° \text{ și } \beta = 150° \text{ etc.}$$

II.4.11. a) $\sin 2B = 2\sin B\cos B = 2\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a} = \frac{2bc}{a^2}.$

b) $\sin B \operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b^2}{ac}$. c) Relația se mai poate scrie $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{c}{a} + \frac{b}{a}$.

d) Primul membru se mai scrie $\frac{2 \sin B}{2 \cos B}$ sau $\operatorname{tg} B$.

e) $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{a + c}{b}$.

f) $\frac{1 + \sin 2B}{\cos 2B} = \frac{1 + 2 \sin B \cos B}{\cos^2 B - \sin^2 B} = \frac{a^2 + 2bc}{c^2 - b^2} =$

$$= \frac{(b + c)^2}{(c + b)(c - b)} = \frac{c + b}{c - b}.$$

II.4.12. Ținem seama de: $\cos C = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$ și $\sin \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2} = \frac{1}{2} (\cos C - \cos B)$, $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2}$, $\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1 + \cos C}{2}$ și expresia devine:

$$\frac{2(\cos C - \cos B)}{(1 + \cos B)(1 + \cos C)} = \frac{2a (b - c)}{(a + c)(a + b)}.$$

II.4.16. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C}$.

$$\frac{a}{b - c} = \frac{\sin A}{\sin B - \sin C} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B - C}{2}}$$

adică $\sin \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2}$.

II.4.17. $ab \cos C - ac \cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2} = b^2 - c^2 \Rightarrow b \cos C - c \cos B = \frac{b^2-c^2}{a}$.

II.4.18. $\cos 2A + \cos 2B = 2 \cos (A+B) \cos (A-B) = -2 \cos C \cos (A-B)$ și $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -2 \cos C \cos (A+B) - 1$ deci $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -2 \cos C [\cos (A-B) + \cos (A+B)] - 1 = -2 \cos C \cdot 2 \cos A \cdot \cos B - 1$ de unde: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cdot \cos B \cos C + 1 = 0$.

II.4.19. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$

$$= \frac{1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1 + 4 \cos A \cos B \cos C}{2} = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

II.4.20. Se știe că $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ și $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ deci

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{(\sin A + \sin B + \sin C)2} = \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{16 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{16 \cos A \cos B \cos C \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

II.4.21. Substituim $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R \sin C$ și $2R[\sin A \sin (B - C) + \sin B \sin (C - A) + \sin C \sin (A - B)] = 2R [\sin (B + C) \sin (B - C) + \sin (C + A) \sin (C - A) + \sin (A + B) \sin (A - B)] = 2R [\sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B] = 0.$

II.4.22. Aceeași substituție ca la II.4.21:

$$4R^2 \left[\frac{\sin^2 A \sin (B - C)}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin^2 B \sin (C - A)}{\sin C + \sin A} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 C \sin (A - B)}{\sin A + \sin B} \right] \text{dar: } \frac{\sin^2 A \sin (B - C)}{\sin B + \sin C} =$$

$$= \frac{\sin A \sin (B + C) \sin (B - C)}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin A (\sin^2 B - \sin^2 C)}{\sin B + \sin C} =$$

$$= \sin A (\sin B - \sin C).$$

Deci: $4R^2 [\sin A (\sin B - \sin C) + \sin B(\sin C - \sin A) + \sin C (\sin A - \sin B)] = 0.$

II.4.23. Ținînd seama de teorema cosinusului avem:

$$\frac{\cos B - \cos C}{p - a} = \frac{\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{\dfrac{-a + b + c}{2}} =$$

$$= \frac{b (a^2 + c^2 - b^2) - c (a^2 + b^2 - c^2)}{abc (-a + b + c)} =$$

$$= \frac{a^2 (b - c) - bc (b - c) - (b - c) (b^2 + bc + c^2)}{abc (-a + b + c)} =$$

$$= \frac{(b - c) [a^2 - (b + c)^2]}{abc (-a + b + c)} = \frac{(b - c) (a - b - c) (a + b + c)}{abc (-a + b + c)} =$$

$$= \frac{2p (c - b)}{abc}.$$ Analog rezultă: $$\frac{\cos B - \cos C}{p - b} =$$

$= \frac{2p(a-c)}{abc}$; $\frac{\cos A - \cos B}{p-c} = \frac{2p(b-a)}{abc}$. Cu aceste

valori: $\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} +$

$+ \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = \frac{2p}{abc}(c - b + a - c + b - a) = 0.$

II.4.24. $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2} =$

$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$.

Rezultă $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

Dar $(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p}$ și $abc = 4RS$.

II.4.25. Ținînd seama de formulele:

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2} =$

$= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$, rezultă:

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c} = \frac{p^2}{abc}.$$

II.4.26. *Metoda I.* Observăm că: $2b\cos^2\frac{C}{2} + 2c\cos^2\frac{B}{2} =$
$= b(1 + \cos C) + c(1 + \cos B) = a + b + c = 2p.$

Prin simetrie rezultă că cele trei egalități au aceeași valoare p.

Metoda II.

Se folosește formula: $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$.

II.4.27. Se ține seama de $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$.

II.4.28. Ținînd seama de $\cos(a-b)\cos(a+b) = \cos^2 a - \sin^2 b$ obținem:

$$1 + \cos A \cos(B-C) = 1 - \cos(B+C)\cos(B-C) = 1 - (\cos^2 B - \sin^2 C) = 1 - \cos^2 B + \sin^2 C = \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{b^2+c^2}{4R^2}.$$

II.4.30. a) Din relația $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ rezultă $\cos A = \frac{b^2+c^2}{4bc} > \frac{1}{2}$.

b) Din $\cos 2B + \cos 2C = 2\cos 2A$ rezultă $2\cos(B+C)\cos(B-C) = 2\cos 2A$.
Deci $\cos 2A + \cos A \cos(B-C) = 0$.

II.4.31. a) Se consideră relația $2\sin A = \sin B + \sin C$;

II.4.32. $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$ și $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ deci relația dată se scrie:

$$c^2 \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c^2 = 4(p-a)(p-b)$ sau $c^2 = (-a+b+c)(a-b+c) \Rightarrow c^2 = c^2 - (a-b)^2$ adică $a = b$.

II.4.33. Ținînd seama de relațiile: $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, expresia dată devine:

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B - \sin C}{2} = \cos^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{B}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{B+C}{2}$$

$$\sin\frac{B-C}{2} = \left(\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = 4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}\sin\frac{B+C}{4}$$

$$\sin\frac{B-C}{4} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

Rezultă: $\sin\frac{B-C}{2} = 0$, $B = C$ (deci triunghiul este isoscel) sau $\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2} \Rightarrow A = B + C$ (triunghiul este dreptunghic.)

II.4.34. $B + C = 2A$ și $A + B + C = 180° \Rightarrow A = 60°$ și $B + C = 120°$.

Din teorema sinusului, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$

$= \dfrac{2a}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$ reținem primul și ultimul raport.

Înlocuind $A = \frac{B+C}{2} = 60°$ și simplificînd rezultă:

$$\frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{2\sin 60°\cos\frac{B-C}{2}} \Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 1 \Rightarrow B = C = 60°.$$

II.4.35. $\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}$;

$$4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A+C}{2} \sin \frac{A+C}{2}; \quad \cos \frac{A-C}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}.$$ Deci

$$3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}$$ sau încă $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

III. GEOMETRIE

Probleme de geometrie plană și în spațiu

III.1. Fiind dat un triunghi ABC, un punct $D \in AB$ și un punct $E \in AC$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$, să se arate că mijloacele laturilor AB, AC și mijlocul lui DE sînt în linie dreaptă.

III.2. Fie $\pi = ABCD$ un paralelogram, O centrul său, Δ_1, Δ_2 două drepte care trec prin O. Δ_1 intersectează laturile opuse AB și CD în punctele A', respectiv C' și Δ_2 intersectează laturile BC și DA în punctele B', respectiv D' ($AB = a$, $AD = b$, $a > b$). Se cere:

a) Să se arate că patrulaterul $A'B'C'D' = \pi'$ este un paralelogram.

b) Să se calculeze ariile paralelogramelor π și π' în funcție de $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ unde α este unghiul ascuțit al paralelogramului π, β unghiul ascuțit pe care-l face Δ_1 cu AB, γ unghiul ascuțit pe care-l face Δ_2 cu BC.

c) Să se arate că aria $\pi = 2$ aria π', dacă $\alpha = \beta$ sau $\alpha = \gamma$.

(I.P., București, 1970)

III.3. Se dă trapezul $ABCD$ cu vîrful A mobil, iar vîrfurile B, C și D fixe. Cercul de diametrul BD taie bazele CD și AB respectiv în E și F. Dreptele EA și CF taie pe BD în K și L.

a) Să se arate că există relația $\frac{DB}{DL}+\frac{DB}{DK}-\frac{DE}{CD}-$
$-\frac{AB}{DE}=2.$

b) Să se afle poziția punctului A pentru care dreptele DB, CF și EA sînt concurente.

c) Să se construiască trapezul în cazul b) cunoscînd suma bazelor, înălțimea și diagonala BD.

(GMB, 1966)

III.4. Fie un cerc de rază $2\sqrt{3}$ cu diametrul MN care se prelungește dincolo de N. Pe această prelungire se ia punctul C la distanța $\sqrt{3}$ de N. Se duce o secantă din punctul C care formează un unghi de $30°$ cu MC și care intersectează cercul în punctele A și B, proiectate în A' și B' pe diametrul MN. Se cere:

a) Lungimea coardei AB.

b) Volumul corpului obținut prin rotirea trapezului $ABB'A'$ în jurul diametrului MN.

(I.P., Brașov, 1971)

III.5. Fie $ABCD$ un trapez oarecare (AD și BC respectiv baza mare și baza mică). Paralela dusă prin C la AB, taie diagonala BD în M și paralela tot la AB, dusă prin D, taie prelungirea diagonalei AC în N. Să se arate că AB este media geometrică a segmentelor CM și DN.

(GMB, 1965)

III.6. În punctele A și B ale unui cerc se duc două tangente care se întîlnesc în C. Prin A se duce o paralelă la BC, care taie cercul în D. Dreapta CD intersectează cercul în E, iar dreapta AE intersectează pe BC în F. Să se demonstreze că:

a) $\widehat{ADE}=\widehat{CAE}=\widehat{BCE}$.

b) $\triangle ACF \sim \triangle CEF$.

c) $FC^2=FA\cdot EF$.

d) $FB=FC$.

e) Să se determine unghiul C pentru ca: $AE=2EF$.

(I.P., Brașov, 1971)

III.7. Pe catetele AB, AC ale unui triunghi dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$, $ACFG$. Dreapta CD intersectează pe AB în H, iar BF pe AC în K. Să se arate că $AH = AK$ și că $AH^2 = BH \cdot CK$.

III.8. Fie un triunghi ABC, isoscel. ($AB = AC$). Perpendiculara în A pe AB taie pe BC în B' iar I este piciorul perpendicularei dusă din B' pe AC. Fie M un punct pe segmentul BB' și fie P, Q, R picioarele perpendicularelor duse din M respectiv pe AB, AC, AB'.

a) Să se arate că BB' este bisectoarea unghiului $AB'I$.

b) Să se arate că există egalitatea $AP + AQ = AI$.

c) Fie E, F, G simetricele lui M față de P, Q, R. Să se arate că punctele E, A, G sînt coliniare și să se arate că EF este perpendiculară pe GF.

(Concurs elevi, 1971)

III.9. Fie ABC un triunghi oarecare, M piciorul înălțimii din A pe BC și N intersecția înălțimii AM cu cercul circumscris triunghiului, iar P proiecția lui N pe AC.

a) Să se arate că dreapta MP este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscris triunghiului.

b) Fie T proiecția lui B pe tangenta la cerc în A. Să se arate că $TA = MP$.

(Institutul de Construcții, București, 1969)

III.10. Se consideră un triunghi oarecare ABC în care se duce o paralelă $B'C'$ la BC ($B' \in AC$; $C' \in AB$); dreptele BB' și CC' se taie în D și prin D se duce $EF \parallel BC$ ($E \in AB$; $F \in AC$).

a) Să se demonstreze că AD este mediana dusă din vîrful A în triunghiul ABC.

b) Să se arate că există relația: $\dfrac{2}{EF} = \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{B'C'}$.

c) Să se arate că dacă notăm: $\dfrac{EC'}{EB} = \dfrac{m}{n}$ și cu S_1, S_2 ariile triunghiurilor $DB'C'$ și DBC atunci $\dfrac{S_1}{S_2} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$.

(I.P., București, 1970)

III.11. Se consideră triunghiul ABC, avînd lungimile laturilor egale cu a, b, c. Bisectoarea interioară a unghiului A taie latura BC în punctul D. Cercul cu centrul în B şi raza BD este intersectat de prelungirea laturii AB în E, iar cercul cu centrul în C şi raza CD este intersectat de prelungirea laturii AC în F.

a) Să se calculeze lungimile tangentelor AM şi AN duse din A la cele două cercuri.

b) Să se arate că dreapta EF este paralelă cu BC şi să se calculeze lungimea segmentului EF.

(Institutul de Construcţii, Bucureşti, 1972)

III.12. Distanţele de la un punct O, la trei puncte coliniare A, B, C satisfac relaţia:

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB - OB^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC$$

(numită relaţia lui Stewart).

III.13. Fie triunghiul oarecare ABC şi A', B', C' picioarele înălţimilor duse din A, B, C. Perpendicularele din A' pe AC respectiv pe AB, taie dreapta $B'C'$ în punctele B'', respectiv C''. Să se arate că:

a) B'' şi C'' sînt simetricele punctului A' faţă de laturile AC şi respectiv AB.

b) Se consideră punctele arbitrare $M \in AB$ şi $N \in AC$. Să se arate că perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este mai mic decît perimetrul triunghiului $A'MN$.

c) Fie I intersecţia lui AA' cu $B''C''$. Să se demonstreze relaţia $IB' \cdot IC'' = IC' \cdot IB'' = IA \cdot IA'$.

(I.P., Bucureşti, 1971)

III.14. A şi B fiind două puncte situate de aceeaşi parte a unui plan π, să se găsească în planul π un punct M, astfel ca suma $MA + MB$ să fie minimă.

III.15. Printr-un punct W din interiorul unui cerc, diferit de centrul cercului se duc două coarde perpendiculare, AB şi CD. Tangentele la cerc, duse în punctele A, B, C, D determină un patrulater $MNPQ$.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b) Notînd cu R și S mijloacele coardelor AB și CD, să se arate că mijlocul segmentului RS se află pe OW.

(I.P., Iași, 1972)

III.16. Printr-un punct A situat în interiorul unui cerc (O) se duce o coardă oarecare BC; pe această coardă ca ipotenuză se construiește un triunghi dreptunghic BDC, vîrful D proiectîndu-se pe ipotenuză în A. Care este locul geometric al punctului D?

III.17. Fie triunghiul ABC cu laturile $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și un punct $P \in BC$ astfel că $BP = kPC$. Se cere:

a) Să se arate că segmentul AP este dat de formula:

$$AP = \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+k)(c^2+kb^2) - a^2k}$$

b) Să se determine k astfel ca AP să fie înălțime în triunghiul ABC.

c) Precizîndu-se k, să se determine lungimea medianei și bisectoarei unghiului A.

(Institutul de Construcții, București, 1971)

III.18. Pe cercul de diametru AB se consideră punctul mobil M, iar pe dreapta AM punctul N, de aceeași parte a lui A, astfel ca $AN = BM$. Să se determine locul geometric al punctului N.

III.19. Pe laturile unui triunghi oarecare ABC construim în afară triunghiurile echilaterale ACD, BCE, ABF. Să se arate că:

a) Segmentele AE, BD și CF sînt egale.

b) Dreptele AE, BD, CF sînt concurente.

c) Triunghiul format cu centrele celor trei triunghiuri echilaterale este echilateral.

(Institutul Pedagogic, Oradea, 1968)

III.20. Perpendiculara în A pe bisectoarea AM a unghiului A în triunghiul ABC, intersectează perpendicularele în B și C pe BC în U respectiv V. Să se arate că: $AM \cdot CV = MU \cdot AC - AU \cdot MC$ și $AM \cdot BU = MV \cdot AB - AV \cdot MB$.

(GMB, 1971)

III.21. Într-un triunghi oarecare ABC se notează cu B_1 și C_1 proiecțiile vîrfurilor B și C pe laturile opuse. Paralela prin C la BB_1 intersectează dreapta AB în C_2, iar paralela prin B la CC_1 intersectează dreapta AC în B_2. Fie M mijlocul laturii BC și N mijlocul segmentului B_2C_2.

a) Să se arate că patrulaterele BCB_1C_1 și BCB_2C_2 sînt inscriptibile. Se vor preciza pozițiile centrelor cercurilor respective.

b) Să se deducă apoi că $MN \perp BC$ și $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

c) Să se arate că triunghiurile ABC, AB_1C_1 și AB_2C_2 sînt asemenea și că există relația $BC^2 = B_1C_1 \cdot B_2C_2$.

(I.P., București, 1970)

III.22. Fie un dreptunghi $ABCD$ cu AB mai mare ca BC. Perpendiculara din punctul D pe diagonala AC intersectează AC în O și AB în E. Notăm lungimile segmentelor: OE, OA, OD, OC cu a_1, a_2, a_3, a_4. Să se arate că a_1, a_2, a_3, a_4 îndeplinesc relațiile $a_1 = ka_2$, $a_2 = ka_3$, $a_3 = ka_4$.

(Concurs elevi, 1970)

III.23. Pe latura AB a dreptunghiului $ABCD$ se consideră un punct mobil M. Dreptele CM și DM intersectează laturile AD și BC în punctele N și P. Să se demonstreze că aria triunghiului MNP este constantă și egală cu jumătatea ariei dreptunghiului.

(Institutul de Construcții, București, 1970)

III.24. Pe laturile unui unghi ascuțit xOy se consideră punctul $A \in Ox$ și $B \in Oy$. Se notează cu A' simetricul lui A față de Oy și cu B' simetricul lui B față de Ox, iar M este mijlocul segmentului $A'B'$.

a) Să se arate că $A'B = AB'$ și că $A'B' < OA + OB$.

b) Pentru ce valoare a unghiului xOy are loc relația:

$$A'B' = 2OM?$$

c) Considerînd punctul A fix să se afle poziția lui B pe Oy astfel că M să fie situat pe bisectoarea unghiului xOy.

(Concurs elevi, 1970)

III.25. Într-un cerc cu centrul O se duce un diametru fix AB. Fie C un punct variabil pe cerc.

a) Să se afle locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC cînd C descrie cercul dat.

b) Bisectoarele exterioare unghiurilor A și B ale triunghiului ABC întîlnesc a doua oară cercul respectiv în punctele M și N. Să se arate că segmentul MN are ca mărime latura pătratului înscris în cercul dat.

c) În ce poziție a punctului C, MN este paralelă cu AB? Poate fi MN perpendiculară pe AB?

(I.P., Iași, 1971)

III.26. Se consideră un romb $ABCD$ cu unghiurile $\hat{B} = \hat{D} < 90°$ și diagonalele $AC = 2a$ și $BD = 2b$ intersectîndu-se în O. Se coboară din A o perpendiculară pe BC care taie BD în H și pe BC în E.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AH în funcție de a și b.

b) Să se determine unghiurile rombului care are proprietatea că latura este medie proporțională între diagonalele sale.

c) Să se calculeze tangenta trigonometrică a unghiurilor rombului pentru care aria laterală a corpului născut din rotirea rombului în jurul diagonalei BD este egală cu dublul ariei sferei de diametru AC.

(I.P., București, 1972)

III.27. Se dă un cerc cu diametrul AB. În A se duce tangenta la cerc și pe ea se iau două puncte oarecare M și N, de o parte și de alta a lui A. Se duce dreapta BM care taie cercul în P și dreapta BN care taie cercul în Q.

a) Să se arate că unghiurile BMA şi PQB sînt egale.

b) Să se arate că patrulaterul $NMPQ$ este inscriptibil.

c) Să se arate că $MP \cdot MB - NB \cdot NQ = MB^2 - NB^2$.

(I.P., Iaşi, 1972)

III.28. Fie cercul O și un triunghi oarecare ABC înscris în el. Pe tangenta în C la cercul dat se ia un punct P și se notează cu M şi N proiecţiile lui P respectiv pe laturile AC şi BC. Se cere:

a) Să se arate că $MN \perp AB$;

b) Considerînd punctele B, C, P fixe, iar A mobil pe cercul dat, să se afle locul geometric al intersecției I a dreptelor AB și MN, cînd A descrie cercul dat.

c) Să se arate că există relația:

$$NB^2 \cdot PC^2 = PM^2 \cdot NB^2 + IB^2 \cdot PC^2.$$

(I.P., București, 1972)

III.29. Fie ABC un triunghi echilateral cu latura egală cu a și AH înălțimea dusă din vîrful A. Cercul circumscris triunghiului AHC întîlnește latura AB în punctul D. Se cere:

a) Suma ariilor suprafețelor cuprinse între arcele mici de cerc $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DH}$, $\overset{\frown}{HC}$ și laturile AB și BC ale triunghiului ABC.

b) Dacă P este un punct oarecare pe latura BC și perpendiculara în P pe latura BC întîlnește dreapta AB în M și dreapta AC în N, să se calculeze în funcție de a suma $MP + NP$.

(Institutul Pedagogic, Pitești, 1969)

III.30. Fie un unghi xAy și Az o semidreaptă interioară unghiului. Prin I, un punct de pe Az, se duce o dreaptă variabilă care intersectează laturile Ax și Ay în punctele M și N iar o dreaptă perpendiculară pe Az care intersectează laturile unghiului în B și C. Tot prin I se duc dreptele $IP \parallel AB$ ($P \in AC$) și $IP' \parallel AC$ ($P' \in AB$). Să se arate că:

a) $\dfrac{IP}{AM} + \dfrac{IP'}{AN} = \text{const.}$

b) Dacă I este pe bisectoarea unghiului xAy atunci

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AB}.$$

(Facultatea de matematică, Institutul pedagogic, Tîrgu Mureș, 1972)

III.31. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu diagonalele AC și BD perpendiculare, notăm cu O intersecția diagonalelor. Fie h_1, h_2, h_3 și h_4 lungimile perpendicularelor coborîte din O pe laturile AB, BC, CD, DA. Să se arate că:

$$(h_1 \cdot AB + h_3 \cdot CD)\,(h_2 \cdot BC + h_4 \cdot DA) = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA.$$

(GMB, 1966)

III.32. Fie ABC un triunghi cu laturile $BC = a$, $AC = b$. Fie AA', BB' înălțimile duse din A și B, H punctul lor de intersecție și D punctul în care dreapta BB' întîlnește paralela dusă în C la AA'. Se cere:

a) Să se arate că patrulaterul $A'HB'C$ este inscriptibil.

b) Să se determine o valoare a unghiului C ascuțit, astfel încît aria $(A'BH)$ = aria $(A'HDC)$ (discuția după a și b).

c) Presupunînd că $a = b$, să se afle pentru ce valoare a lui C (unghi ascuțit) raportul $\dfrac{\text{aria } (ABC)}{\text{aria } (BHA')}$ este minim.

(I.P., București, 1970)

III.33. Se dă paralelogramul $ABCD$ și un punct $E \in AB$. Trei paralele duse prin A, B, C întîlnesc dreapta DE respectiv în M, N, P.

a) Să se demonstreze că $MN = DP$.

b) Fie Q intersecția paralelei duse din N la AD cu dreapta CP. Să se arate că $PQ = AM$.

c) Se cere locul geometric al punctului Q, cînd AM, BN, CP se rotesc respectiv în jurul punctelor A, B, C, rămînînd paralele între ele.

(I.P., București, 1972)

III.34. Se consideră un triunghi isoscel ABC. Pe laturile egale $AB = AC = a$ se iau punctele mobile P și Q astfel ca $AP = CQ$. Fie O mijlocul segmentului PQ.

a) Să se demonstreze că distanța d de la punctul O la latura BC este constantă.

b) Să se afle locul geometric al punctului O.

c) Fie P'' și Q' proiecțiile lui P și Q pe BC. Să se arate că aria trapezului $PP''Q'Q$ este constantă.

d) Dacă D este mijlocul lui BC iar $A = 30°$, să se afle volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ADC în jurul axei ce face cu prelungirea lui BC un unghi de 15°.

(I.P., Brașov, 1971)

III.35. Un trunchi de piramidă are ca bază două romburi cu laturile de 6 cm și 8 cm și cîte un unghi de 120°. Înălțimea trunchiului de piramidă este egală cu triplul diagonalei mari a bazei mici. Dreapta care trece prin punctele de intersecție a diagonalelor trunchiului de piramidă este perpendiculară pe bazele triunghiului.

a) Să se calculeze înălțimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

b) Să se afle aria laterală a trunchiului de piramidă.

(Institutul pedagogic, Tîrgu-Mureș, 1972)

III.36. Un trapez isoscel de baze $2x$ și $2y$ este circumscris unui cerc de rază R dată.

a) Să se stabilească relația care există între x, y și R.

b) Întreaga figură se rotește în jurul diametrului care unește mijloacele bazelor. Să se calculeze, în funcție de x, y și R, aria suprafeței totale și volumul solidului generat de acest trapez.

c) Notînd cu S și V aria suprafeței totale și volumul solidului să se verifice că

$$V = \frac{1}{3} S \cdot R.$$

d) Să se calculeze bazele trapezului, în cazul cînd volumul trunchiului de con generat de trapez este de 4 ori mai mare decît volumul sferei generate de cercul de rază R.

(Institutul Petrol şi Gaze, Bucureşti, 1970)

III.37. Piramida $SABCD$ are $SA = SB = SC = SD = a$, iar baza $ABCD$ este un trapez isoscel avînd baza mare $CD = 2b$, laturile $BC = AD = b$ și $\widehat{CAD} = 90°$.

a) Să se afle aria laterală și volumul piramidei $SABCD$.

b) Să se arate că piramidei i se poate circumscrie un con circular drept. Să se determine volumul conului și al sferei circumscrise piramidei date.

(Institutul Pedagogic, Galați, 1973)

III.38. Un pătrat $ABCD$ de latură a se rotește în jurul unei drepte din același plan cu pătratul care trece prin vîrful A și face cu diagonala AC un unghi x, unde $45° < x < 90°$. Să se afle aria și volumul corpului de rotație obținut, în funcție de a şi x.

(Concurs elevi, 1974)

III.39. Un vas sub forma unui trunchi de con trebuie să aibă o capacitate de 900 litri și o adîncime de un metru. Știind că diametrul unei baze este de 1,20 m, se cere să se calculeze diametrul celeilalte baze.

III.40. Una din celebrele piramide din Egipt are baza un pătrat cu latura de 237 m, iar înălțimea de 146 m. Presupunînd că această piramidă este plină și zidită din piatră, a cărei densitate este de 2,75 să se calculeze greutatea sa. Dacă din piatra cuprinsă în piramidă s-ar construi un zid înalt de 2 m și gros de 0,45 m, se cere să se calculeze lungimea zidului.

III.41. Două cercuri tangente exterior în punctul A au razele $R = 9$ m, $r = 3$ m și centrele respectiv O_1 și O_2. Tangentele comune exterioare se intersectează în punctul V,

punctele de tangență cu cercul O_1 fiind T_1 și T_1' și cu cercul O_2 fiind T_2 și T_2'. Să se calculeze:

a) Aria figurii cuprinsă între cele două cercuri și tangentele comune exterioare cercurilor date.

b) Raza cercului circumscris triunghiului VT_1T_1' și raza cercului cu centrul în A tangent dreptei VT_1.

c) Aria totală a solidului generat de rotirea trapezului $O_1T_1T_2O_2$ în jurul lui O_1O_2.

(Institutul de Arhitectură, București, 1973)

III.42. Volumul unui con a cărui înălțime este de 8,20 m este împărțit în trei părți echivalente prin plane paralele la bază. Să se calculeze distanța de la vîrf la fiecare din planele secante.

III.43. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($A = 90°$) cu laturile BC, CA și AB de lungimi egale, respectiv cu a, b și c.

a) Să se arate că există totdeauna un singur punct M în interiorul triunghiului ABC, astfel încît triunghiurile MAB, MBC și MCA să aibă ariile egale.

b) Presupunînd că punctul M satisface condiția de la a) să se stabilească relația: $MB^2 + MC^2 = 5\ MA^2$.

c) Să se arate că volumele corpurilor obținute prin rotirea triunghiurilor CMB și AMB în jurul laturii AC sînt egale.

(I.P., Iași, 1971)

III.44. Un cub este înscris într-o sferă. Să se găsească volumul cubului în funcție de raza sferei.

III.45. *Problema lui Arhimede:* Dacă circumscriem unei sfere un cilindru și un con echilateral se cere:

a) Să se arate că aria totală a cilindrului este medie proporțională între aria sferei și aria totală a conului.

b) Să se arate că volumul cilindrului este medie proporțională a celorlalte două volume.

c) Să se arate că: $\dfrac{\text{Volumul sferei}}{\text{Aria sferei}} =$

$$= \frac{\text{Volumul cilindrului}}{\text{Aria totală a cilindrului}} = \frac{\text{Volumul conului}}{\text{Aria totală a conului}} = \frac{R}{3}.$$

III.46. Fie b aria bazei mici a unui trunchi de piramidă, h înălțimea lui și b' aria secțiunii făcută printr-un plan paralel cu bazele la o distanță de baza mică egală cu două treimi din înălțime. Să se demonstreze că volumul trunchiului de piramidă este dat de formula

$$V = \frac{h(b + 3b')}{4}.$$

(I.P., Cluj, 1958)

III.47. O zonă sferică cu două baze are suprafața de 100 m^2, iar raza sferei este de 5 m. Știind că una din bazele sale se găsește la distanță de un metru de centrul sferei, se cere să se calculeze aria celeilalte baze.

III.48. Înălțimea unui cilindru circular drept este h și raza r $(h < 2r)$. În acest cilindru este înscris un pătrat oblic față de axă, astfel încît toate vîrfurile lui se află pe cercurile bazelor. Să se afle latura pătratului.

Aplicație: $h = 2, r = 7$.

(I.P., Iași, 1972)

III.49. Baza unei piramide este trapezul $ABCD$ cu unghiurile din A și D drepte, iar piciorul înălțimii piramidei este mijlocul laturii BC. Dacă V este vîrful piramidei să se arate că:

a) Muchiile VA și VD sînt egale.

b) Să se afle volumul piramidei știind că înălțimea trapezului este de 6 cm, linia mijlocie a trapezului este de 4 cm, iar muchia VA este de 13 cm.

(Institutul pedagogic, Tîrgu Mureș, 1972)

III.50. Un punct mobil M descrie un cerc cu centrul în O situat în planul P. A fiind un punct fix în spațiu, să se determine poziția punctului M, astfel încît aria triunghiului OAM să fie maximă.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

III.1. Fie C', B' M mijloacele lui AB, AC respectiv DE. Construim $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{FB}{FA} = \frac{EC}{EA}$, sau ținînd seama de relația din enunț:

$$\frac{FB}{FA} = \frac{DA}{DB} \text{ sau } \frac{DB}{FA} = \frac{DA}{FB} = \frac{DB + DA}{FA + FB} = 1 \Rightarrow DB = FA,$$

adică C' este și mijlocul lui DF. În triunghiul DEF, $C'M \parallel EF$ deci $C'M \parallel BC$; $C'B'$ fiind paralela cu $BC \Rightarrow$ $\Rightarrow C'$, M, B' sînt coliniare.

III.2. a) Dacă O este centrul de simetrie a lui $\pi \Rightarrow$ diagonalele $A'C'$ și $B'D'$ se taie în părți egale.

b) $S_\pi = 2\,S_{ABD} = ab \sin\alpha$; $S_{\pi'} = 4\,\dfrac{A'O \cdot OB' \sin \widehat{A'OB'}}{2}$,

$$ah_1 = ab \sin\alpha \Rightarrow h_1 = b \sin\alpha = A'C' \sin\beta \Rightarrow A'C' = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta};$$

$$bh_2 = ab \sin\alpha \Rightarrow h_2 = a \sin\alpha = B'D' \sin\gamma \Rightarrow B'D' = \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma};$$

$$S_{\pi'} = 4 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{b \sin\alpha}{2 \sin\beta} \sin(\beta + \gamma - \alpha) \cdot \frac{a \sin\alpha}{2 \sin\gamma}$$

$$\widehat{A'OB'} = 180^\circ + \alpha - \beta - \gamma \Rightarrow S_{\pi'} = \frac{ab \sin^2\alpha}{2 \sin\beta \sin\gamma} \cdot \sin(\beta + \gamma - \alpha)$$

(vezi fig. 64).

c) Dacă $\alpha = \beta \Rightarrow S_{\pi'} = \dfrac{ab \sin^2\alpha}{2 \sin\gamma \cdot \sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \dfrac{ab \sin\alpha}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2S_{\pi'} = ab \sin\alpha \Rightarrow S_\pi = 2S_{\pi'}$.

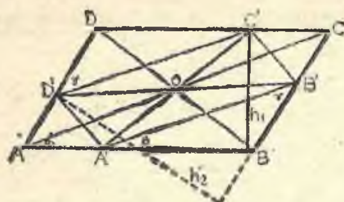


Fig. 64

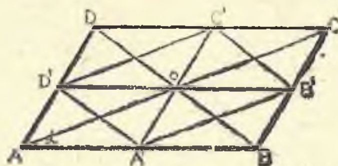


Fig. 65

Analog pentru $\alpha = \gamma$ (vezi fig. 65).

III.3. a) $\triangle DCL \sim \triangle FLB \Rightarrow \frac{DC}{FB} = \frac{DL}{LB} = \frac{CL}{LF}$ (vezi fig. 66)

$\triangle DEK \sim \triangle AKB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DK}{KB} = \frac{EK}{KA}$. Aplicînd proprietățile proporțiilor în cele două egalități deducem:

$$\frac{DL}{DC} = \frac{LB}{FB} = \frac{DB}{DC + FB} \Rightarrow \frac{DL}{DB} = \frac{DC}{DC + FB} \quad (1)$$

$$\frac{DK}{DE} = \frac{KB}{AB} = \frac{DB}{DE + AB} \Rightarrow \frac{DK}{DB} = \frac{DE}{DE + AB} \quad (2)$$

Inversînd și adunînd membru cu membru rezultă:

$\frac{DB}{DL} + \frac{DB}{DK} = 1 + \frac{FB}{DC} + 1 + \frac{AB}{DE}$. Dar $DE = FB$ deci:

$$\frac{DB}{DL} + \frac{DB}{DK} - \frac{ED}{CD} - \frac{AB}{ED} = 2.$$

b) Împărțind egalitățile (1) și (2) membru cu membru rezultă:

$$\frac{DL}{DK} = \frac{DC\,(DE + AB)}{DE\,(DC + DE)} \text{ sau } DL \cdot DE(DC + DE) =$$

$$= DC \cdot DK(DE + AB).$$

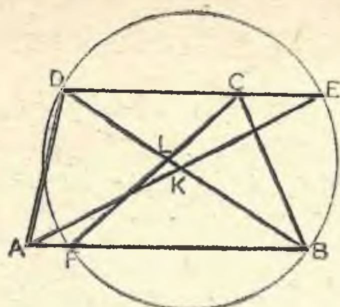


Fig. 66

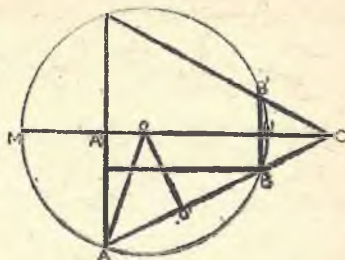


Fig. 67

Dacă dreptele CF, EA, DB sînt concurente, L și K coincid. Deci $DL = DK$ și $DE^2 = DC \cdot AB$, de unde poziția punctului A este determinată prin calcularea segmentului AB din proporția: $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{DE}$.

c) Cunoscînd ipotenuza și cateta DF putem construi triunghiul dreptunghic DFB. Cercul circumscris acestui triunghi taie pe DC în E. Pentru determinarea lui C și A se află mărimea lui DC și AB. Problema este posibilă dacă înălțimea este mai mică decît diagonala ($DF < DB$) și dacă $DE \leqslant \frac{DC + AB}{2}$ adică dacă:

$$\sqrt{BD^2 - DF^2} \leqslant \frac{DC + AB}{2}.$$

III.4. a) Din triunghiul $OO'C \Rightarrow OO' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ iar din triunghiul $AOO' \Rightarrow AO' = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{21}$ (vezi fig. 67).

b) $CO' = \frac{9}{2}$, $AC = CO' + \frac{AB}{2} = \frac{9 + \sqrt{21}}{2}$.

$$BC = AC - AB = \frac{9 - \sqrt{21}}{4}.$$

În $\triangle BB'C$; $\hat{C} = 30° \Rightarrow BB' = \frac{9 - \sqrt{21}}{4}$. În $\triangle AA'C$; $\hat{C} = 30° \Rightarrow AA' = \frac{9 + \sqrt{21}}{4}$.

În triunghiul dreptunghic ADB, $\hat{B} = 30° \Rightarrow BD = AB \cos 30° = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Volumul trunchiului de con $= \frac{\pi}{3} h(R^2 + r^2 + Rr) =$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} \left[\frac{(9 + \sqrt{21})^2}{16} + \frac{(9 - \sqrt{21})^2}{4} + \frac{9 + \sqrt{21}}{4} \cdot \frac{9 - \sqrt{21}}{4} \right] = \frac{33\pi\sqrt{7}}{16}.$$

III.5. Se știe că $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD}$. În trapezul $ABCM$: $\frac{OC}{OA} = \frac{CM}{AB}$; în trapezul $ABND$: $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DN}$; dar $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$ deci $\frac{CM}{AB} = \frac{AB}{DN}$. ($O$ este intersecția diagonalelor).

III.6. a) $AD \| BC \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{BCE}$, $\widehat{ADE} = \widehat{CAE}$ deoarece au ca măsură $\frac{\widehat{AE}}{2}$.

b) $\widehat{CAF} = \widehat{ECF}$ și $\widehat{AFC}$ comun $\Rightarrow \triangle ACF \sim \triangle CEF$.

c) $\frac{FC}{EF} = \frac{FA}{FC}$.

d) Puterea punctului F față de cerc $\Rightarrow FA \cdot FE = BF^2$ și din c) $\Rightarrow BF = FC$.

e) $AE = 2\,EF \Rightarrow AD = 2\,FC = BC = AC \Rightarrow \hat{C} = 60°$ fiindcă $\widehat{AFC} = 90°$ iar $\widehat{FAC} = 30°$.

III.7. Notăm $AC = b$, $AB = c$ (vezi fig. 68). $\triangle CAH \sim \triangle CED \Rightarrow AH = \dfrac{bc}{b+c}$; $\triangle BAK \sim \triangle BFG \Rightarrow AK =$

$$= \frac{bc}{b+c},$$

dar $BH = c - AH = \dfrac{c^2}{b+c}$; $CK = b - AK = \dfrac{b^2}{b+c}$.

Deci $BH \cdot CK = \dfrac{b^2c^2}{(b+c)^2} = AH^2$.

III.8. a) $\widehat{BB'A} = 90° - \hat{B}$ (vezi fig. 69); $\widehat{CB'I} = 90° - \hat{C} \Rightarrow \widehat{BB'A} = \widehat{CB'I}$.

b) Din dreptunghiul $APMR \Rightarrow MR = AP$ iar din dreptunghiul $MSIQ \Rightarrow MS = QI$. Dar $MR = MS \Rightarrow AP = QI \Rightarrow AI = AQ + QI = AQ + AP$ ($S \in IB$ iar $MS \perp IB'$).

c) Se arată că $\widehat{EAM} + \widehat{MAG} = 180°$. Deoarece $AM = AE$; $AM = AF$, $AM = AG \Rightarrow AE = FA = AG = AM$ adică $MFEG$ patrulater inscriptibil și cum $\widehat{EMG} = 90° \Rightarrow EG$ este diametrul cercului care trece prin M, F, E, G.

Unghiul EFG subîntinde arcul de cerc corespunzător diametrului $\Rightarrow \widehat{EFG} = 90°$.

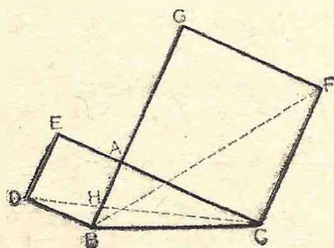


Fig. 68

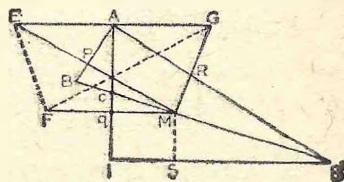


Fig. 69

III.9. a) Patrulaterele $ABCN$ și $NMPC$ inscriptibile $\Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ANC} = \widehat{APM} = 180° - \widehat{PAT} \Rightarrow AT \parallel MP$.

b) $\widehat{TMB} = \widehat{TAB} = \widehat{ACB}$ (patrulaterul $ATBM$ inscriptibil) $\Rightarrow TA = MP$ ($ATMP$ paralelogram).

III.10. a) $\triangle EDC' \sim \triangle BC'C \Rightarrow \dfrac{ED}{BC} = \dfrac{EC'}{BC'}$;

$\triangle DFB' \sim \triangle BB'C \Rightarrow \dfrac{DF}{BC} = \dfrac{B'F}{B'C}$. Dar $\dfrac{EC'}{BC'} = \dfrac{B'F}{B'C}$ deci

$$\frac{ED}{BC} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow ED = DF.$$

Prelungim pe AD pînă taie pe BC în M. Din

$\triangle ADF \sim \triangle AMC \Rightarrow \dfrac{DF}{MC} = \dfrac{AD}{AM}$; din $\triangle AED \sim \triangle ABM \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ED}{BM} = \frac{AD}{AM}.$$

Deci $\dfrac{DF}{MC} = \dfrac{ED}{BM} \Rightarrow MC = MB$, adică M este mijlocul lui BC.

b) Din $\triangle EDC' \sim \triangle BCC' \Rightarrow \dfrac{ED}{BC} = \dfrac{EC'}{BC'}$; din

$\triangle EBD \sim \triangle B'C'B \Rightarrow \dfrac{ED}{B'C'} = \dfrac{BE}{BC'}$. Adunînd aceste egalități

$$\text{rezultă: } ED\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}\right) = 1.$$

Analog $DF\left(\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{B'C'}\right) = 1$ care însumate dau:

$$EF\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2}{EF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{B'C'}.$$

c) $\triangle DB'C' \sim \triangle BCD \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \left(\dfrac{C'D}{DC}\right)^2 = \left(\dfrac{EC'}{EB}\right)^2 = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$.

III.11. a) Cu teorema bisectoarei în triunghiul ABC relativă la unghiul A obținem: $DC = \frac{ab}{b+c}$. Analog

$$DB = \frac{ac}{b+c}.$$

Din triunghiul $AMB \Rightarrow AM = \sqrt{c^2 - \frac{a^2c^2}{(b+c)^2}}$.

Notînd $a + b + c = 2p$, $b + c - a = 2(p - a) \Rightarrow AM = \frac{2c}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$. Analog din $\Delta\, ANC \Rightarrow AN =$

$$= \frac{2b}{b+c}\sqrt{p(p-a)}.$$

b) $\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BA} = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b+c}$.

$$\frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CA} = \frac{a}{b+c}.$$

Deci $\frac{BE}{AB} = \frac{CF}{CA} \Rightarrow BC \parallel EF \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, AEF \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{BA}{EA} = \frac{CA}{FA}$.

Ținînd seama că $EF = \frac{BC \cdot EA}{BA} = \frac{a}{c}\left(c + \frac{ac}{c+b}\right) =$
$= \frac{a}{b+c} \cdot 2p$.

III.12. Se construiește $QD \perp AC$ (vezi fig. 70). Din triunghiurile OAB, OBC rezultă:
$OA^2 = OB^2 + AB^2 - 2AB \cdot DB$ și $OC^2 = OB^2 + BC^2 + 2\,BC \cdot DB$.

Pentru a elimina pe DB din aceste două relații vom înmulți prima cu BC și a doua cu AB. Însumîndu-le membru cu membru obținem relația cerută.

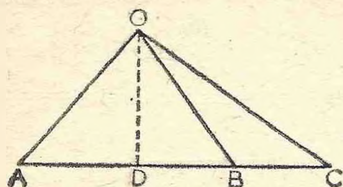


Fig. 70

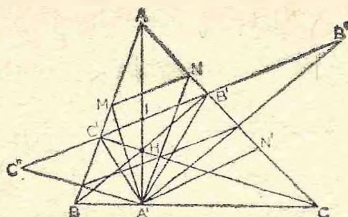


Fig. 71

III.13. a) $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90° \Rightarrow BC'B'C'$ este inscriptibil $\Rightarrow \hat{B} = \widehat{AB'C'} = \widehat{B''B'C}$ (1), H fiind ortocentrul triunghiului (vezi fig. 71).

$\widehat{HAC} + \widehat{HB'C} = 180° \Rightarrow$ patrulaterul $A'HB'C$ inscriptibil $\Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{B} = \widehat{A'B'C'}$. (2)

Fiindcă $\widehat{HCA'} + \hat{B} = 90°$ și $\widehat{HB'A'} + \widehat{AB'C} = 90°$, din relațiile (1) și (2) rezultă: $\widehat{A'B'C} = \widehat{CB'B''}$ adică triunghiul $A'B'B''$ este isoscel deoarece $B'C$ este și bisectoare și înălțime. Deci $A'B' = B'B'' \Rightarrow B''$ este simetricul lui A' față de AC. Analog se demonstrează că C'' este simetricul lui A' față de AB.

b) Perimetrul triunghiului $A'B'C' = A'B' + B'C' + C'A' = B'B'' + B'C' + B''C' = C''B''$.

Dar $C''B'' < C''M + MN + NB'' = A'M + MN + A'N =$ perimetrul triunghiului $A'MN$.

c) Unghiurile din A', B' sînt drepte, iar C'' simetricul lui A' față de diametrul $AB \Rightarrow$ cercul de diametru AB trece prin punctele A, B, A', B', C''. Puterea lui I față de acest cerc $\Rightarrow IA \cdot IA' = IB' \cdot IC''$.

Puterea lui I față de cercul de diametru AC, care trece prin punctele A, C, A', C', B' este: $IA \cdot IA' = IC' \cdot IB''$. Rezultă: $IB' \cdot IC'' = IC' \cdot IB'' = IA \cdot IA'$.

III.14. Fie B' simetricul punctului B față de planul $\pi \Rightarrow BM = B'M$ deci $MA + MB = MA + MB'$ și suma $MA + MB$ este minimă cînd punctele A, M, B' sînt coliniare.

III.15. a) $\hat{M} = 180° - \widehat{AOC}$; $\hat{P} = 180° - \widehat{DOC} \Rightarrow \hat{M} + \hat{P} = 360° - (\widehat{AC} + \widehat{BO}) = 180°$.

b) Patrulaterul $ORWS$ este dreptunghi și RS, OW sînt diagonale.

III.16. Din triunghiul $BDC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC$ (vezi fig. 72). Puterea punctului A față de cerc este:

$AB \cdot AC = AE^2 \cdot AF^2$ unde EF este coarda ce trece prin A, perpendiculară pe OA; rezultă $AD = AE = AF$ și E, F fiind fixe, locul lui D este cercul de diametru EF.

III.17. a) Relația lui Stewart pentru fascicolul (AB, AP, AC) este: $c^2 \cdot PC - a \cdot AP^2 + b^2 \cdot BP = a \cdot BP \cdot PC$.

Dar: $BP = \frac{ak}{1+k}$ și $PC = \frac{a}{1+k} \Rightarrow AP^2 = \frac{c^2 + b^2k}{1+k} - \frac{a^2k}{(1+k)^2}$.

$$AP = \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+k)(c^2+b^2k) - a^2k}. \quad (1)$$

b) Pentru ca $AP \perp BC$ trebuie: $AP^2 = c^2 - BP^2$ și $AP^2 = b^2 - PC^2$,

sau $c^2 - BP^2 = b^2 - PC^2$.

$c^2 - b^2 = (BP + PC)(BP - PC) = a^2 \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow k = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 - c^2 + b^2}$. Înlocuind această valoare a lui k în (1) se obține înălțimea h_a corespunzătoare laturii a: $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $2p = a + b + c$.

c) Pentru $k = 1$, AP este mediana m_a și rezultă:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

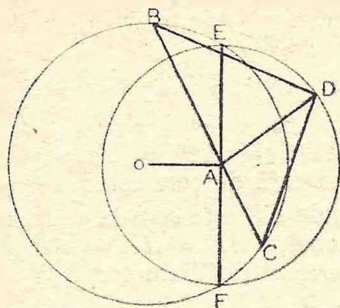


Fig. 72

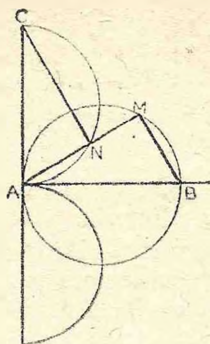


Fig. 73

Dacă $k = \frac{c}{b}$, AP este bisectoarea unghiului $A \Rightarrow b_a =$

$$= \frac{b}{b+c}\sqrt{\frac{c\,[(b+c)^2 - a^2]}{b}} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

III.18. Perpendicularele în A și N pe AB și AN se intersectează în C și $\Delta\, AMB = \Delta CNA$. Punctul N este situat pe cercul de diametru AC. Locul lui N este format din două semicercuri ale cercurilor egale cu cercul dat, tangente în A dreptei AB, formate din punctele situate în partea dreptei AC în care este situat și punctul B (vezi fig. 73).

III.19. a) $\Delta\, ABD = \Delta ACF \Rightarrow BD = CF$.

b) Patrulaterul $BMCE$ inscriptibil (M intersecția cercurilor ADC și ABF) $\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BCE} = 60°$ și deoarece $\widehat{AMB} = 120° \Rightarrow A,\ M,\ E$ sînt coliniare.

$BD \cap CF = M \Rightarrow AE,\ BD,\ CF$ sînt concurente.

c) Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor ACD, BCE, ADF. Linia centrelor $O_1O_2 \perp MC$, $O_1O_3 \perp AM$, $O_2O_3 \perp BM \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta\, O_1O_2O_3$ echilateral.

III.20. Patrulaterul $AUBM$ este inscriptibil ($\hat{A} = \hat{B} = 90°$), și conform teoremei lui Ptolemeu rezultă:

$$UM \cdot AB = UB \cdot AM + UA \cdot MB \qquad (1)$$

$$\Delta\, UMB \sim \Delta\, MVC.$$

$$\frac{BU}{CV} = \frac{BM}{MC} = \frac{UM}{VM} \text{ și } \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \text{ (2) (teorema bisectoarei)}$$

$$\text{deci } \frac{AB}{AC} = \frac{BU}{CV} \text{ (3).}$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă: $BM = \dfrac{AB \cdot MC}{AC}$;

$BU = \dfrac{AB \cdot CV}{AC}$. Înlocuind în (1) și simplificînd cu AB obținem: $UM \cdot AC = AM \cdot CV + UA \cdot MC$.

Analog se obține relația a doua aplicînd teorema lui Ptolomeu în patrulaterul inscriptibil $AMCV$ (vezi fig. 74).

III.21. a) BCB_1C_1 este inscriptibil fiindcă $\widehat{BC_1C} = \widehat{BB_1C} = 90°$, iar $BM = MC$ este raza cercului.

$\widehat{B_2CC_2} = \widehat{B_2BC_2} = 90°$, N este mijlocul lui B_2C_2 și centrul cercului.

b) $MN \perp BC$; $\widehat{AC_2B_2} = \widehat{ACB} = \widehat{AC_1B_1} \Rightarrow B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

c) $\Delta\, ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$;

$$\Delta\, ABB_1 \sim \Delta AC_2C \Rightarrow \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC_2}{AC};$$

$$\Delta\, ABC \sim \Delta AB_2C_2 \Rightarrow \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Din relațiile precedente rezultă:

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{B_2C_2}{BC} \Rightarrow BC^2 = B_1C_1 \cdot B_2C_2 \text{ (vezi fig. 75).}$$

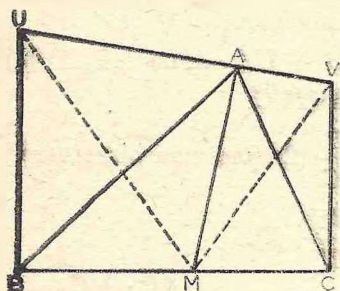


Fig. 74

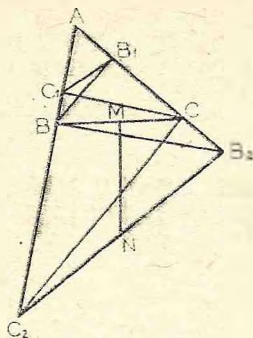


Fig. 75

III.22. Din asemănări de triunghiuri dreptunghice rezultă:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = k \text{ (vezi fig. 76).}$$

III.23. În trapezul $NPCD$ ariile triunghiurilor MNP și DMC sînt egale.

III.24. a) Triunghiul ABA' este isoscel $\Rightarrow AB = BA'$.

Triunghiul ABB' este isoscel $\Rightarrow AB = AB'$. Avem $OA = OA'$ și $OB = OB'$ și rezultă că: $A'B' < OA' + OB'$.

b) $A'B' = 2OM \Rightarrow MA' = MB' = MO \Rightarrow A', O, B'$ sînt conciclice $\Rightarrow \widehat{A'OB} = 90°$; $\widehat{xOB'} = \widehat{xOY} = \widehat{yOA'} \Rightarrow$ $\Rightarrow xOy = 30°$.

c) Bisectoarea lui $\widehat{xOy}$ este și bisectoarea lui $\widehat{A'OB'}$ și rezultă că trebuie ca OA să fie egală cu OB(vezi fig. 77).

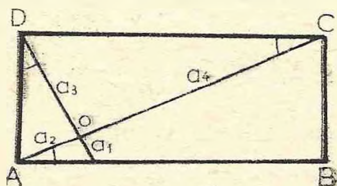


Fig 76

Fig. 77

Fig. 78

III.25. a) Locul geometric este arcul capabil de unghiul de 135° sub care se vede diametrul AB din ambele semicercuri (vezi fig. 78).

b) $\dfrac{180^\circ - \widehat{CAB}}{2} + \dfrac{180^\circ - \widehat{CBA}}{2} = 135^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MC} +$

$+ \overset{\frown}{NC} = 270^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$ (vezi fig. 79).

c) $MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$; MN nu poate fi perpendicular pe AB. Unghiul maxim pe care-l poate face MN cu AB este de 45° (vezi fig. 80).

Fig. 79

Fig. 80

III.26. a) Aria $(ABC) = ab = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{AE\sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Patrulaterul $OHEC$ este inscriptibil, deci $AH \cdot AE = AC \cdot OA$.

$$AH \cdot \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = a \cdot 2a;\ AH = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

b) $AB^2 = 4ab,\ a = AB \sin\alpha,\ b = AB\cos\alpha;$

$$4\sin\alpha\cos\alpha = 1;\ \sin 2\alpha = \sin B = \frac{1}{2}$$

unde $\alpha = \frac{\hat{B}}{2}$.

$$\hat{B} = 30^\circ;\ \hat{A} = 150^\circ.$$

c) $2\pi a \cdot AB = 8\pi a^2;\ \sqrt{a^2+b^2} = 4a;\ b^2 = 15a^2.$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{15} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}};\ \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{7};\ \operatorname{tg}B = \frac{\sqrt{15}}{7};$$

$$\operatorname{tg}C = -\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

III.27. a) $\widehat{PQB} = \frac{\widehat{BP}}{2},\ \widehat{BMA} = \frac{\widehat{AQB} - \widehat{AP}}{2} =$

$$= \frac{\widehat{APB} - \widehat{AP}}{2} = \frac{\widehat{BP}}{2}.$$

b) $\widehat{PQB} + \widehat{PQN} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} + \widehat{BMN} = 180^\circ.$

c) Considerînd puterea punctului față de cerc rezultă: $MP \cdot MB - NB \cdot NQ = MA^2 - NA^2 = (MB^2 - AB^2) - (NB^2 - AB^2) = MB^2 - NB^2.$

III.28. a) Fie $I = AB \cap MN$; patrulaterul $MCNP$ inscriptibil $\Rightarrow \widehat{CNM} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BIN$ dreptunghic $\Rightarrow$ $\Rightarrow IN \perp AB$.

b) $\triangle BIN$ este dreptunghic în I, ipotenuza BN fiind fixă $\Rightarrow$ locul lui I este cercul de diametru BN.

c) $PC^2 = MP^2 + MC^2$ (1).

$$\triangle MPC \sim \triangle BIN; \ \frac{PC}{BN} = \frac{MP}{IN} = \frac{MC}{BI}.$$

Din (1) rezultă: $PC^2 \cdot NB^2 = NB^2 \cdot MP^2 + MC^2 \cdot BN^2$ iar din proporționalitate $MC^2 \cdot BN^2 = PC^2 \cdot BI^2 \Rightarrow PC^2 \cdot$ $\cdot BN^2 = BN^2 \cdot MP^2 + PC^2 \cdot BI^2$.

III.29. a) Însumînd ariile segmentelor de cerc rezultă $\frac{\pi a^2}{24}$.

b) $MP + NP = \frac{a\sqrt{3}}{24} \frac{BM + AN + CA}{BA} = a\sqrt{3}$.

III.30. a) $\triangle PIN \sim \triangle AMN$ și $\triangle PIM \sim \triangle AMN \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{IP}{AM} = \frac{IN}{NM}$ și $\frac{IP'}{AN} = \frac{IM}{MN} \Rightarrow \frac{IP}{AM} + \frac{IP'}{AN} = \frac{IN + IM}{MN} = 1$.

b) Cum I este bisectoarea unghiului $xAy \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel. $IP \parallel AB$; $IP = \frac{AB}{2}$. Analog $IP' = \frac{AC}{2}$.

Dar $AB = AC$; $IP = IP' = \frac{AB}{2}$; dar $\frac{IP}{AM} + \frac{IP'}{AN} = 1$

deci $\frac{AB}{AM} + \frac{AB}{AN} = 2 \Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AB}$ (vezi fig. 81).

III.31. Din teorema lui Ptolemeu rezultă că: $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Ținînd seama că $AC =$ $= AD + CO$, $BD = BO + DO$; $AB^2 = AO^2 + BO^2$; $BC^2 =$ $= BO^2 + CO^2$; $CD^2 = CO^2 + DO^2$; $AD^2 = AO^2$ și ridicînd

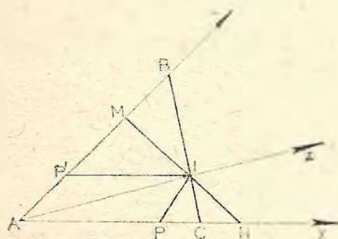


Fig. 81

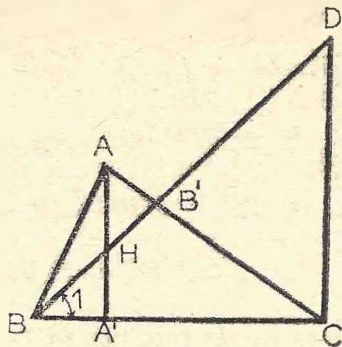


Fig. 82

la pătrat relația lui Ptolemeu după efectuarea calculelor se obține:

$AO^2 \cdot BO \cdot DO + BO \cdot CO^2 \cdot DO + AO \cdot BO^2 \cdot CO + AO \cdot$ $\cdot CO \cdot DO^2 = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$ sau încă

$AO \cdot BO(AO \cdot DO + BO \cdot CO) + CO \cdot DO(BO \cdot CO + AO \cdot DO) =$ $= (AO \cdot DO + BO \cdot CO)(AO \cdot BO + CO \cdot DO) = AB \cdot BC \cdot$ $\cdot CD \cdot DA$.

Cum însă: $h_1 = \dfrac{AO \cdot BO}{AB}$; $h_2 = \dfrac{BO \cdot CO}{BC}$; $h_3 = \dfrac{CO \cdot DO}{CD}$; $h_4 = \dfrac{AO \cdot DO}{AD}$ rezultă: $(h_2BC + h_4AD)(h_1AB + h_3CD) =$ $= AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$.

III.32. a) $\widehat{HA'C} + \widehat{HB'C} = 180°$ (vezi fig. 82).

b) $A'HDC$ trapez; aria $(A'HDC) =$

$$= \frac{(A'H + CD)A'C}{2} = \frac{(2a - b\cos C)\, b \operatorname{ctg} C \cos C}{2};$$

aria $(A'BH) = \dfrac{BA' \cdot A'H}{2} = \dfrac{(a - b\cos C)^2 \operatorname{ctg} C}{2}$ fiindcă

$A'C = b\cos C$; $CD = a \operatorname{tg} B_1 = a \operatorname{ctg} C$; $A'H = BA' \operatorname{tg} B_1 =$ $= (a - A'C)\operatorname{ctg} C = (a - b\cos C)\operatorname{ctg} C$.

Deci trebuie ca:

$$(a - b\cos C)^2 \operatorname{ctg} C = (2a - b\cos C)b \operatorname{ctg} C \cos C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b^2\cos^2 C - 4ab\cos C + a^2 = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{2a \pm a\sqrt{2}}{2b};$$

$\cos C = \frac{a}{b}\,\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ şi $\cos C = \frac{a}{b}\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Pentru ca C să fie unghi ascuţit trebuie ca $0 < \frac{a}{b} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} < 1$ şi $0 < \frac{a}{b}\,\frac{2-\sqrt{2}}{2} < 1$ etc.

c) Aria $ABC = \frac{a^2 \sin C}{2}$, aria $BHA' =$

$$= \frac{a^2(1 - \cos C)^2 \operatorname{ctg} C}{2}.$$

$$\frac{\text{aria } (ABC)}{\text{aria } (BHA')} = \frac{\sin C}{(1-\cos C)^2 \operatorname{ctg} C} = \frac{\sin^2 C}{(1-\cos C)^2 \cos C} =$$

$$= \frac{1+\cos C}{\cos C(1-\cos C)}.$$

Notăm $\cos C = x$ şi raportul cu y. Avem:

$$y = \frac{1+x}{x-x^2} \Rightarrow xy - x^2y - x - 1 = 0 \text{ sau}$$

$yx^2 + (1-y)x + 1 = 0$. Pentru a avea rădăcini reale $(1-y)^2 - 4y \geqslant 0 \Rightarrow y\,(-\infty, 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

Pentru $y = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x_{\text{min.}} = \frac{y-1}{2y} = \frac{1-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} =$ $= -1 - \sqrt{2}$. Nu corespunde deoarece $\cos C \neq -\sqrt{2} - 1$, $y = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{2}$. Deci pentru $\cos C =$ $= -1 + \sqrt{2}$ raportul este minim $\Rightarrow C = \arccos(\sqrt{2} - 1)$ şi minimumul raportului este $3 + 2\sqrt{2}$.

III.33. a) $\triangle AME \sim \triangle BNE \sim \triangle CPD \Rightarrow \frac{ME}{AE} =$

$= \frac{EN}{EB} = \frac{ME + EN}{AE + EB} = \frac{MN}{AB}$ iar $\frac{ME}{AE} = \frac{DP}{CD}$ și $AB = CD$

deci $\frac{MN}{AB} = \frac{DP}{CD}$ sau $MN = DP$.

b) $\frac{ME}{AM} = \frac{EN}{BN} = \frac{MN}{AM + BN}$; $\frac{ME}{AM} = \frac{DP}{CP}$ deci

$$\frac{MN}{AM + BN} = \frac{DP}{CP} \text{ însă } MN = DP \text{ deci}$$

$$AM + BN = CP = BN + QP \Rightarrow AM = QP.$$

c) Patrulaterul $CBNQ$ fiind paralelogram $\Rightarrow NQ \parallel BC$ şi $NQ = BC$. Cînd dreptele paralele BN, CP se rotesc, NQ face o mișcare de translație deci locul lui Q este pe o paralelă la dreapta fixă DE.

III.34. a) Fie $QR \parallel AB$, $PP' \parallel BC$. În trapezul dreptunghic $PQQ'P''$ linia mijlocie $d = \frac{PP'' + QQ'}{2}$. Triunghiurile isoscele CQR și APP' sînt egale și au înălțimile egale: $d = \frac{PP'' + AA'}{2} = \frac{h}{2}$ unde h este înălțimea triunghiului ABC (vezi fig. 83).

b) $\triangle APO = \triangle ORQ \Rightarrow AO = OR \Rightarrow$ locul geometric este linia mijlocie a triunghiului ABC.

c) Aria trapezului $= \frac{PP'' + QQ'}{2} \cdot P''Q'$ unde

$$\frac{PP'' + QQ'}{2} = \frac{h}{2} \text{ și } P''Q' = BC - (BP' + Q'C)^2 = \frac{BC}{2}.$$

$$\text{Aria trapezului} = \frac{\text{Aria } ABC}{2} = \text{const.}$$

d) Volumul corpului va fi dat de diferența dintre volumul trunchiului de con și volumul conului. Fie $E = xx' \cap DD'$.

Fig. 83

Fig. 84

$$\text{Deci: } V = \frac{\pi EC}{3}(a^2 + ED^2 + aED) - \frac{\pi ED^2 \cdot EC}{3} =$$

$$= \frac{\pi EC}{3}(a^2 + aED) = \frac{\pi a}{3} \cdot EC(a + ED) = \frac{\pi a}{3} DC \cos 15° \cdot$$

$$\cdot (a + DC \sin 15°) = \frac{\pi a}{3} a \sin 15° \cos 15° (a + a \sin^2 15) =$$

$$= \frac{\pi a^3}{12}\left[1 + \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16}\right] = \frac{\pi a^3 (6 - \sqrt{3})}{48} \quad \text{(vezi fig. 84).}$$

III.35. a) $72\sqrt{3}$ cm. b) $14\sqrt{3885}$ cm².

III.36. a) Fie $ABCD$ trapezul cu baza mică $AB = 2x$ și baza mare $CD = 2y$. Notăm cu O centrul cercului, cu P punctul de tangență al lui BC cu cercul. Atunci $BC = AD = x + y$ și $OP^2 = BP \cdot PC$ sau $R^2 = xy$.

b) $S = 2\pi(x^2 + y^2 + xy)$. $V = \frac{2\pi R}{3}(x^2 + y^2 + xy)$.

c) $V = \frac{1}{3} SR$.

d) $V_{sferei} = \frac{4\pi R^3}{3}$ şi deoarece $V = \frac{16\pi R^3}{3}$

rezultă sistemul $\begin{cases} (x + y)^2 = 9R^2 \\ xy = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} R \\ y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} R. \end{cases}$

III.37. *a*) $S = \frac{b}{4}(4\sqrt{a^2 - b^2} + 3\sqrt{4a^2 - b^2})$.

$$V = \frac{b^2}{4}\sqrt{3(a^2 - b^2)}.$$

b) $V_{con} = \frac{\pi b^2 \sqrt{a^2 - b^2}}{3}$. Centrul bazei este mijlocul lui DC, iar centrul sferei aparţine înălţimii conului.

$$V_{sferă} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a^6}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}.$$

III.38. Fie B_1, C_1, D_1 proiecţiile lui B, C, D pe axa de rotaţie (vezi fig. 85). Aria este formată din ariile laterale a două conuri şi a două trunchiuri de con, iar volumul din volumele celor două trunchiuri de con minus volumele celor două conuri.

$AB_1 = a\cos(x - 45°) = \frac{a\sqrt{2}(\cos x + \sin x)}{2} = DD_1$;

$BB_1 = D_1A = a\sin(x - 45°) = \frac{a\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{2}$;

$CC_1 = a\sqrt{2}\sin x$ de unde $S = 4\pi a^2\sqrt{2}\sin x$;

$V = \pi a^3\sqrt{2}\sin x$.

III.39. $2r = 0{,}92$ m.

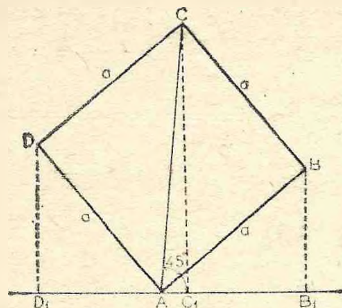


Fig. 85

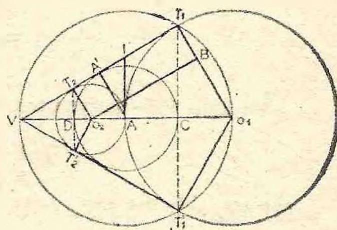


Fig. 86

III.40. $G = 7517284500$ kg; $l = 3037286{,}66$ m.

III.41. a) $T_1T_2 = 6\sqrt{3}$ pentrucă $AI^2 = \left(\frac{T_1T_2}{2}\right)^2$ (vezi fig. 86).

$$O_1B = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6 \Rightarrow \widehat{O_1O_2B} = 30°.$$

$$\widehat{T_1O_1A} = 60°;\ \widehat{AO_2T_2} = 120°;\ \text{Aria figurii} = 2A_{AT_1T_2} =$$

$$= 2(A_{\text{trapez } O_1T_1T_2O_2} - A_{\text{sector } T_1O_1A} - A_{\text{sector } AO_2T_2}) =$$

$$= 72\sqrt{3} - 33\pi = 3(24\sqrt{3} - 11)\pi.$$

b) $\widehat{T_1VO_1} = 30° \Rightarrow VO_1 = 18.$

$$r_1 = \frac{O_1V}{2} = 9;\ r_2 = \frac{O_1T_1}{2} = \frac{9}{2}.$$

c) Din triunghiul $VT_1O_1 \Rightarrow 18\,CO_1 = 81 \Rightarrow CO_1 = \frac{9}{2}.$

$$CT_1 = \sqrt{81 - \frac{81}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Din triunghiul $VT_2O_2 \Rightarrow DO_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow DT_2 = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} =$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$A_{\text{solidului}} = A_{\text{laterala trunchi con}} + A_{\text{lat.con}_1} + A_{\text{lat.con}_2} =$$

$$= 9\pi(12 + 5\sqrt{3}).$$

III.42. $d_1 = 5{,}68$ m; $d_2 = 7{,}16$ m.

III.43. a) Punctul $M = G$ baricentrul triunghiului ABC (vezi fig. 87).

Notînd cu h_1, h_2, h_3 distanțele de la M la cele trei laturi, rezultă: $h_1 = \frac{bc}{3a}$; $h_2 = \frac{c}{3}$, $h_3 = \frac{b}{3}$, deci constante.
Punctul M este cel de al patrulea vîrf al dreptunghiului (celelalte trei vîrfuri fiind A și proiecțiile lui M pe b și c) și este unic.

b) Notînd cu m_a, m_b, m_c lungimile medianelor rezultă

$$m_a = \frac{a}{2} \quad MA = \frac{a}{3}; \quad m_b = \frac{\sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \Rightarrow MB = \frac{2}{3} m_b =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 + 4c^2}}{3}.$$

$$m_c = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}, \ MC = \frac{2}{3} m_c = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{3}$$

De unde:

$$MB^2 + MC^2 = 5\frac{a^2}{9} = 5\,MA^2.$$

c) Notăm r_1 și r_1 razele de rotație ale centrelor de greutate. Volumele generate prin rotația celor două suprafețe egale în jurul lui AC sînt egale dacă r_1 și r_2 sînt egale (Guldin).

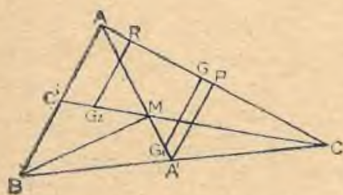


Fig. 87

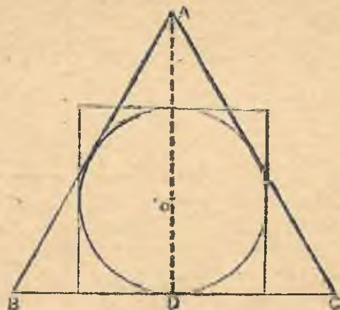


Fig. 88

Din triunghiul $AA'P \Rightarrow r_1 = G_1Q = \frac{8}{9}A'P = \frac{8}{9}\cdot\frac{c}{2} = \frac{4c}{9}$.

$$r_2 = G_2R = \frac{8}{9}\,C'A = \frac{8}{9}\cdot\frac{c}{2} = \frac{4c}{9}.$$

$V = \frac{S_{ABC}}{3}\cdot 2\pi\frac{4c}{9} = \frac{4\pi}{27}\,bc^2$. $\left(\frac{4c}{9}\right.$ este distanța de la axa de rotație la centrul de greutate al suprafeței).

III.44. $V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$.

III.45. Vezi figura 88.

III.46. Notînd cu x distanța de la vîrful piramidei (din care s-a obținut trunchiul de piramidă) la planul bazei mici și cu B aria bazei mari, vom avea:

$$\frac{x}{x+h} = \sqrt{\frac{b}{B}} \text{ și } \frac{3x}{3x+2h} = \sqrt{\frac{b}{b'}}.$$

Eliminînd pe x din relațiile de mai sus, rezultă

$\sqrt{B} = \frac{3\sqrt{b'}-\sqrt{b}}{2}$. Deci volumul este $V = \frac{h(b+3b')}{4}$.

III.47. $A = 63{,}56\ \text{m}^2$.

III.48. Fie x latura pătratului

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2; \quad \frac{x^2}{4} = \frac{h^2}{4} + r^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{h^2 + 4r^2}{2}}. \quad x = 10.$$

III.49. a) Fie F mijlocul lui AD și E mijlocul lui BC. Conform teoremei celor trei perpendiculare $VF \perp AD \Rightarrow$ $\Rightarrow$ triunghiul VAD este isoscel $\Rightarrow VA = VD$.

b) $V = \frac{A_{\text{bazei}}\, VE}{3}$; $A_{\text{bazei}} = \frac{(AB + CD)\, AD}{2}$;

$\frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = EF \cdot AD$. Deci $V = \frac{EF \cdot AD \cdot VE}{3} =$

$$= \frac{4 \cdot 6 \cdot VE}{3} = 8\, VE.$$

$$VE = 12 \text{ cm} \Rightarrow V = 96 \text{ cm}^3.$$

III.50. Fie A' proiecția lui A în planul P. Notăm $\widehat{A'OM} =$ $= x$ și fie A_1 proiecția lui A' pe $OM \Rightarrow AA_1 \perp OM$ (teorema celor trei perpendiculare). Deci aria $OMA = \frac{OM \cdot AA_1}{2} =$ $= \frac{R}{2} AA_1$ (R raza cercului). Notăm $OA' = a$ (constantă) și $AA' = d$ (constantă) și rezultă:

$A'A_1 = OA' \sin x = a \sin x$; $AA_1 = \sqrt{AA'^2 + A'A_1^2} =$ $= \sqrt{d^2 + a^2 \sin^2 x}$ și deci aria $OMA = \frac{R}{2}\sqrt{d^2 + a^2 \sin^2 x}$.

Aria este maximă cînd $\sin^2 x$ este maxim deci $x = 90°$ și $x = 270°$.

Deci poziția lui M se află la intersecția cercului cu diametrul perpendicular pe OA'. Se obțin două poziții pentru M, M_1 și M_2 și două triunghiuri egale OM_1A, OM_2A cu ariile $\frac{R}{2}\sqrt{a^2 + d^2}$.

IV. TESTE DE CONTROL

În locul obișnuitelor exerciții și probleme recapitulative prezentăm un capitol care cuprinde un număr de 31 teste.

Pentru cei care doresc să-și aprecieze lucrările am dat un mod de calcul al mediei (media ponderată) pentru fiecare test în parte, specificîndu-se totodată și timpul de lucru.

Astfel, subiectele numerotate cu cifre romane se notează de la 1 la 10 și apoi se face media după formula dată. De exemplu: I — nota $N_I = 10$, II — nota $N_{II} = 7$, III — nota $N_{III} = 5$, IV — nota $N_{IV} = 6$. Dacă formula de calcul este

$$N = \frac{3\,N_I + 5\,N_{II} + 2\,N_{III} + N_{IV}}{11},$$

atunci media finală este

$$N = \frac{3 \cdot 10 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 6}{11} = 7{,}36.$$

Recomandăm ca testele să fie abordate după ce lucrarea a fost studiată astfel:

Pentru testele 1 — 9, capitolele I.1, I.2, I.3, și I.4;

Pentru testele 10 — 13, toate capitolele din partea I;

Pentru testele 14 — 22, capitolele II.1, și II.2;

Pentru testele 23, 24 — toate capitolele din partea II.

Testele 25 — 31 sînt recapitulative.

TESTUL 1

I. Să se calculeze suma:

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

II. Pentru care valori ale lui $x \in R$ există relațiile:

a) $$\frac{(3-x)(x-2)(x^2+1)}{(-9-x^2)(x^2+x+7)(x^2-10x+25)} \leqslant 0.$$

b) $$\frac{(x^2+1)(3-x)(x-2)}{(-9-x^2)(x^2+x+7)(x^2-10x+25)} \geqslant 0.$$

III. Să se determine mulțimea $A=\{x\in N \mid x^2-5|x|+ +4=0\}$.

IV. Pentru ce valori ale lui $m \in R$ graficul funcției de gradul doi $y=x^2-mx+1$,

a) este tangent axei Ox;

b) are punctul de minim situat pe axa Oy;

c) intersectează axa Ox în două puncte distincte;

d) nu intersectează axa Ox.

V. Fiind dată ecuația $mx^2-2(m+1)x+m+2=0$, se cere:

a) Să se determine parametrul $m \in R$ astfel încît o rădăcină să fie dubla celeilalte;

b) Să se determine parametrul $m \in R$ astfel încît rădăcinile să fie sinusul respectiv cosinusul aceluiași arc;

c) Să se determine $m \in R$ astfel încît o rădăcină să fie inversa celeilalte;

d) Să se găsească o relație între rădăcini independentă de parametrul m.

Timp de lucru: 80 minute

$$N = \frac{1{,}7\,N_I + 2{,}3\,N_{II} + 2\,N_{III} + 3\,N_{IV} + 3\,N_V}{12}$$

TESTUL 2

I. Să se simplifice expresia:

$$E(x, y) = \frac{x^2 + 2\sqrt{y} + y + 2x + 2x\sqrt{y}}{x^2 - \sqrt{y} + x\sqrt{y} - x}.$$

II. Să se rezolve ecuația: $2x + \sqrt{x - 1} = 8$.

III. Să se reprezinte grafic funcția de gradul al doilea $f(x) = -1 - x^2$.

IV. Să se determine punctele în care graficul funcției $f(x) = |x^2 - 5x + 6| - |x^2 - 16|$ intersectează axa Ox.

V. Folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți, în ecuația $x^2 - 2mx + m = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2, $m \in R$, să se calculeze expresiile:

a) $E_1(m) = x_1^2 + x_2^2$;

b) $E_2(m) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

c) $E_3(m) = x_1^3 + x_2^3$;

d) $E_4(m) = \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$.

VI. Care este condiția ca ecuațiile: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ și $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ să aibă aceleași rădăcini?

VII. Să se determine valorile lui $m \in R$ din ecuația $(m+6)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$ astfel încît aceasta să admită o rădăcină egală cu $-\frac{1}{2}(-2+\sqrt{5})$.

Timp de lucru: 90 minute.

$$N = \frac{2N_I + 1{,}5N_{II} + 1{,}5N_{III} + 3N_{IV} + 4N_V + N_{VI} + 2N_{VII}}{15}.$$

TESTUL 3

I. Să se simplifice expresia $E(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$.

II. Să se determine mulțimea $A = \{x \in R \mid \sqrt{(x-2)^2} = 1\}$.

III. Să se efectueze $(x - \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} - y) : (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})$.

IV. Să se determine a și $b \in R$ știind că graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx$ trece prin punctele

$A(1, 0)$; $B(-1, 2)$.

V. Să se determine $m \in R$ astfel ca ecuația:

$f(x) = x^2 - 5x + m = 0$ să admită o rădăcină nulă.

VI. Care este mulțimea pe care poate să o parcurgă x pentru ca să existe $\sqrt[2k]{-x^2+9}$?

VII. Să se determine parametrul $m \in R$ din ecuația:

$8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$ astfel încît rădăcinile să fie:

a) reale și egale;

b) opuse;

c) inverse una alteia.

VIII. Să se determine $m \in R$ astfel încît pentru orice $x \in R$, funcția

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8x^2 - (m-1)x + m - 7}}$$

să fie definită.

Timp de lucru: 60 minute.

$$N = \frac{N_I + 1,5\ N_{II} + 2\ N_{III} + 1,5\ N_{IV} + 0,5\ N_V + N_{VI} +}{13}$$

$$\frac{+ 3\ N_{VII} + 2,5\ N_{VIII}}{13}$$

TESTUL 4

I. Să se raționalizeze numitorul fracției $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

II. Să se găsească valorile lui x pentru care:

$|x - 2| \leqslant 5$,

a) algebric,

b) grafic.

III. Pentru ce valori ale lui x fracția

$$\frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 - |x| - 6}$$

este supraunitară?

(I.P., București, 1972)

IV. Să se determine valorile parametrului $m \in R$ din ecuația:

$x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 astfel ca:

a) Ecuația să admită rădăcini reale;

b) Între rădăcinile ecuației să existe relația

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 2(1 - x_1 x_2);$$

c) O rădăcină să fie cuprinsă între 0 și 1 iar cealaltă între 1 și 2.

(Institutul de Arhitectură, București, 1969)

Timp de lucru: 90 minute.

$$N = \frac{N_I + 2N_{II} + 3N_{III} + 2N_{IV}}{8}$$

TESTUL 5

I. Suma a două numere este 63 iar suma dintre raportul direct și raportul invers al celor două numere este 2,05. Să se afle cele două numere.

II. Un număr este format din două cifre. Dacă adăugăm 9 la acest număr obținem un număr format din aceleași cifre, dar cifrele în ordine inversă. Numărul împărțit prin produsul cifrelor este 6. Care este numărul?

III. Pentru ce valori $x \in R$ are loc egalitatea:

$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = 0, \text{ cu } a > 0?$$

(I.P., București, 1975)

IV. Să se înscrie, într-un pătrat, un pătrat de arie minimă.

V. Fie ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$.

a) Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației în raport cu parametrul $m \in R$;

b) Să se determine $m \in R$, astfel încît între rădăcini să existe relația: $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 x_2$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

(A.S.E., București, 1967)

VI. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației:

$$4x^2 - 4(m - 1)\ x - m + 3 = 0.$$

Să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care

$$1 + 4x_1^2 + 4x_2^2 > m; \quad m \in R.$$

(A.S.E., 1967, enunț parțial.)

Timp de lucru: 90 minute.

$$N = \frac{N_I + N_{II} + N_{III} + 1{,}4\ N_{IV} + 2{,}4\ N_V + 1{,}2\ N_{VI}}{8}.$$

TESTUL 6

I. Să se afle $x \in R$ pentru care:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = \sqrt{4 - 2x}.$$

II. Să se determine mulțimea:

$$A = \{x \in R \mid |2x - 1| - |x + 1| = 2 - x\}.$$

III. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{x + 7} + \sqrt{2x - 3} = 4$.

IV. Fie ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

cu rădăcinile x_1 și x_2.

Se cere să se formeze ecuația în y ale cărei rădăcini sînt:

a) Opusele rădăcinilor ecuației date;

b) Inversele rădăcinilor ecuației date;

c) Egale cu rădăcinile ecuației date multiplicate cu un număr m;

d) Egale cu rădăcinile ecuației date, adunate cu un număr h;

e) Egale cu pătratul rădăcinilor ecuației date;

f) Egale cu pătratul inverselor rădăcinilor ecuației date.

V. Care din relațiile de mai jos sînt echivalente:

a) $x^2 - 4 > 0$,

b) $|x| < 2$,

c) $|x| > 2$,

d) $-2 < x < 2$?

VI. Să se determine mulțimea punctelor din planul axelor de coordonate pentru care $2x - 3 \geqslant - 5 - y$.

VII. Să se traseze graficul funcției $y = |1 - x|$.

Timp de lucru: 100 minute.

$$N = \frac{1{,}5\, N_I + 1{,}5\, N_{II} + 1{,}5\, N_{III} + 2{,}5\, N_{IV} + N_V + N_{VI} + N_{VII}}{10}.$$

TESTUL 7

I. Să se determine $m \in R$ astfel ca

$$\frac{(-x^2 - 1)\,[(m^2 - m - 6)x^2 - 2(m^2 - 1)x + m^2 + m]}{5x^2 + x + 7} > 0$$

oricare ar fi $x \in R$.

II. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}.$$

(Admitere, A.S.E.)

III. Să se determine mulțimea

$$A=\{x\in R \mid \sqrt{3x+2}-\sqrt{x-6}\geq 2\}.$$

IV. Pe latura BC a unui triunghi oarecare ABC se consideră un punct oarecare M. Din M se construiesc perpendicularele MP și MQ respectiv pe AC și AB. Care este poziția punctului M pe BC pentru ca MP^2+MQ^2 să fie minimă? Aflați și valoarea minimă a acestei sume.

V. Să se formeze ecuația de gradul II cunoscînd suma rădăcinilor $S=m+1$ și discriminantul $\Delta=(m-2)^2$.

VI. Să se rezolve ecuația:

$$\alpha x^2-\beta x+\Delta=0$$

în cazul în care α, β, Δ sînt rădăcinile și discriminantul ei.

(G.M.B., 1965)

VII. a) Să se determine trinomul de gradul doi, $P(x)=ax^2+bx+c$, astfel ca $P(\alpha)=\alpha(\beta+\gamma)$; $P(\beta)=\beta(\alpha+\gamma)$; $P(\gamma)=\gamma(\alpha+\beta)$.

b). Pentru ce valoare a lui m ecuația $P(x)+m=0$ are o rădăcină dublă?

Timp de lucru: 120 minute

$$N=\frac{N_I+N_{II}+N_{III}+N_{IV}+N_V+N_{VI}+2N_{VII}}{8}.$$

TESTUL 8

I. Să se scrie sub cea mai simplă formă expresia:

$$E(x, y) = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x - y}\right).$$

II. Să se studieze semnul expresiei:

$$E(x) = \frac{(x - 2)\,(x^2 - 7x + 12)}{(13 - x) \cdot (x - x^2 - 1)x}.$$

III. Să se afle valorile lui x pentru care

$$|x^2 - 4| < 1.$$

a) algebric,

b) grafic.

IV. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1 \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases}$$

(A.S.E., București)

V. Fie ecuația:

$$x^2 - (3m + 4)\,x + (m + 1)^2 = 0$$

cu rădăcinile x_1 și x_2.

Se cere:

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației după parametrul $m \in R$;

b) Să se găsească o relație independentă de m între rădăcinile x_1 și x_2.

VI. Fie trinomul

$$P(x) = (3 - m)\, x^2 + 2mx + m, \quad m \in R, \quad m \neq 0.$$

Să se determine valorile lui m astfel încît:

a) $P(x) > 0$, oricare ar fi $x \in R$.

b) $P(x) < 0$, oricare ar fi $x \in R$.

c) Ecuația $P(x) = 0$ să admită o singură rădăcină în intervalul $(0, 3)$;

d) Rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ să satisfacă relația $x_1 = 2x_2$;

e) Să se rezolve inecuația $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} < 1$ unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{2N_I + N_{II} + 5N_{III} + 4N_{IV} + 3N_V + 5N_{VI}}{20}$$

TESTUL 9

I. Fie ecuația $x^2 - a(a-2)\,x - (a-1)^2 = 0,\ a \in R.$

Se cere:

a) Să se arate că ecuația are rădăcini reale pentru orice $a \in R$ și apoi să se rezolve.

b) Să se determine mulțimea valorilor lui a care verifică inegalitatea:

$$2\sqrt{x_1 + x_2 - 2(a-2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \geqslant 1$$ unde x_1 și x_2

sînt rădăcinile ecuației date.

(G.M.B. 1969)

II. Fie familia de parabole, definită prin funcția de gradul II:

$$y = mx^2 + 2(m + 1) x + m + 2, \quad m \neq 0, \quad m \in R.$$

Se cere:

a) Să se arate că punctele de maxim ale parabolelor se află pe o semidreaptă, din dreapta $y = x + 1$;

b) Fie A și B punctele de intersecție ale unei parabole oarecare cu axa xx' și fie F proiecția vîrfului V al parabolei respective pe axa xx'. Să se arate că pentru orice $m \in R$ avem relația:

$$|AB| = 2\,|FV|;$$

c) Să se arate că toate parabolele trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer.

(G.M.B., 1970)

III. Se consideră funcția f definită pe R cu valorile $f(x) = 2 - |x|$. Se cere să se calculeze $g(x) = f[f(x)]$ și să se traseze graficele funcțiilor f și g.

(I.P., București, 1975)

IV. Să se determine regiunea din planul axelor de coordonate pentru care sînt satisfăcute simultan condițiile:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 < 0 \\ 2x - y - 1 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{cases}$$

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{2N_I + 2{,}5N_{II} + 1{,}5N_{III} + N_{IV}}{7}.$$

TESTUL 10

I. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \log_\alpha x \cdot \log_\alpha z + \log_\alpha y = 3 \\ \log_\alpha y \cdot \log_\alpha z - \log_\alpha x = 4 \\ (\log_\alpha z + 1) \log_\alpha x + (\log_\alpha z - 1) \log_\alpha y = 1 \end{cases} \quad \alpha > 0, \ \alpha \neq 1$$

(Institutul de Construcții, 1972)

II. Se consideră ecuația

$$x^3 + 2(m-1)x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0 \quad \text{unde} \quad m \in R.$$

Se cere:

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor acestei ecuații știind că admite ca rădăcină pe $x_1 = 1$;

b) Să se determine valorile lui m pentru care

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6.$$

c) Dacă notăm cu x_1 rădăcina egală cu 1, să se determine rădăcinile raționale ale ecuației:

$$\lg \frac{1}{2} |x_2 - x_3| - \lg(5m - 6) + \lg(m + 3) = 0$$

știind că ecuația $4m^3 + 28m^2 - 31m + 57 = 0$ nu admite rădăcini raționale.

(I.P., București, 1972, enunț modificat.)

III. Să se determine mulțimea

$$S = \{(x, y) \in R \times R \,|\, 3|x| + 2y = 1 \text{ și } x + 3|y| = 15\}.$$

IV. În dezvoltarea

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$$

suma coeficienților binomiali este cu 240 mai mică decît suma coeficienților binomiali din dezvoltarea $(a + b)^{2n}$. Să se afle termenul al treilea al dezvoltării.

V. Să se rezolve ecuația

$$12\, C_{x+3}^{x-1} = 55\, A_{x+1}^2.$$

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{1{,}6\, N_I + 2{,}4\, N_{II} + N_{III} + N_{IV} + N_V}{7}.$$

TESTUL 11

I. Să se arate că $\log_a b = \log_{a^n} b^n$ și folosind această relație să se rezolve ecuația:

$$\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$$

(Facultatea de studii economice, Timișoara, 1970)

II. Să se calculeze expresia

$$E(x) = \frac{\sqrt[n]{x+1} + \sqrt[n]{x-1}}{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x-1}},$$

pentru $x = \dfrac{2^n + 2^{n-2} \cdot C_n^2 + 2^{n-4} \cdot C_n^4 + \ldots}{2^{n-1} \cdot C_n^1 + 2^{n-3} \cdot C_n^3 + 2^{n-5} \cdot C_n^5 + \ldots}$ unde $n \in N^* - \{1\}$.

(A.S.E., București)

III. Fie binomul $(a+b)^m$ unde $a = \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}$, $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$, logaritmul fiind în baza 10. Să se determine valoarea lui x pentru care termenul ce conține b^5 este egal cu 21, știind că, coeficientul binomial al celui de-al treilea termen al dezvoltării

binomului este media aritmetică a coeficienților binomiali ai celui de-al doilea și al patrulea termen.

(I.P., București, 1970, enunț modificat)

IV. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78. \qquad x, y \in R \end{cases}$$

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{N_I + 1{,}6\ N_{II} + 1{,}4\ N_{III} + N_{IV}}{5}.$$

TESTUL 12

I. Fie sistemul $\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4x - 1 = 0 \\ y - mx = -3, \quad m \in R. \end{cases}$

Se cere:

a) Să se rezolve sistemul;

b) Să se determine valoarea lui m pentru care soluțiile sistemului sînt confundate și să se rezolve sistemul în acest caz;

c) Să se afle valorile lui m pentru care ambele soluții ale sistemului sînt formate din numere întregi;

d) Să se afle valorile lui m pentru care una din soluții este formată din numere pozitive.

(Institutul pedagogic, Suceava, 1971)

II. a) Să se demonstreze că ecuația

$$\frac{\lg(x^2 + m^2) - \lg m}{\lg 3x} = 1.$$

are rădăcini reale, oricare ar fi parametrul real, $m > 0$.

b) Să se determine m astfel încît ecuația de la punctul a) să aibă o rădăcină și numai una în intervalul $(0, 1)$.

c) Să se stabilească semnul expresiei:

$$E(x) = \frac{\log_3(x^2 - 8)}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 7)}.$$

(Institutul Pedagogic, Suceava)

III. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m$, să se afle termenul care conține pe a^6 știind că diferența dintre coeficienții termenilor al treilea și al doilea este 35.

(A.S.E., București)

Timp de lucru: 100 minute

$$N = \frac{2,5\, N_I + 2,5\, N_{II} + N_{III}}{6}$$

TESTUL 13

I. a) Se dă ecuația $x^2 + ax + 2 = 0$. Să se determine a și să se rezolve ecuația, știind că între rădăcinile ei x_1 și x_2 există relația $x_1^4 + x_2^4 = 17$;

b) Să se afle rădăcinile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 = p \\ x^2y + xy^2 + y^3 = q; \end{cases}$$

c) Să se calculeze expresia

$$E(x, y) = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y\sqrt{y}}, \quad x > 0 \text{ și } y > 0,$$

x și y fiind soluțiile sistemului de la b).

(A.S.E., București, 1968)

II. Să se rezolve inecuația:

$$\log_2 (3 + 2x - x^2) + 2 \log_4 x \leqslant 2$$

(I.P., București, 1975)

III. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n$ suma coeficienților ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle x pentru care suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este egală cu 135.

(I.P., Galați, 1970)

IV. Fie ecuația: $\dfrac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2.$

a) Să se rezolve ecuația.

b) Pentru ce valori ale lui a rădăcina este un număr întreg.

(Facultatea de studii economice, Craiova)

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{1{,}5\, N_I + N_{II} + N_{III} + 1{,}5\, N_{IV}}{5}.$$

TESTUL 14

I. Ştiind că $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$ şi $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ să se calculeze $\sin \alpha$ şi $\cos \alpha$.

II. Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

III. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \sin^2(a + b) - \sin^2(a - b).$$

IV. Să se exprime trigonometric expresia

$$E = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

V. Să se exprime:

$$E = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x \text{ şi } F = \frac{9}{a^2} + \sin 2x + \cos 4x$$

în funcţie de a, ştiind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$.

(Admitere, Institutul Pedagogic, Timişoara, 1965)

VI. Fie expresiile:

$$E_1 = \sin x - \sin 2x + \sin 3x$$

$$E_2 = \cos x - \sin 2x + \cos 3x.$$

a) Să se calculeze valorile lui E_1 şi E_2 cînd

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4} \text{ şi } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

b) Să se transforme E_1 şi E_2 în expresii calculabile prin logaritmi.

c) Să se găsească valorile lui x pentru care $E_1 = E_2$.

(I.P., Braşov, 1970)

VII. Să se arate că:

$$\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a.$$

VIII. Să se calculeze $\operatorname{tg} 15°$.

IX. Să se transforme în produs expresia:

$$\sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24}.$$

Timp de lucru: 90 minute.

$$N = \frac{N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV} + 1{,}5\,N_V + 2{,}5\,N_{VI} + N_{VII} + N_{VIII} + N_{IX}}{11}.$$

TESTUL 15

I. Fie expresia:

$F = 1 - \cos 4x + \sin 5x - \sin x$. Se cere:

a) Să se calculeze valoarea lui F pentru $x = \frac{\pi}{12}$;

b) Să se transforme F într-o expresie calculabilă prin logaritmi;

c) Să se rezolve ecuația $F = 4 \sin 2x \cos 3x$;

II. a) Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y)}{\sin 2y}$$ nu depinde de y;

b) Să se rezolve ecuația

$$E(2x) = E\left(\frac{\pi}{8} - 2x\right).$$

c) Să se rezolve ecuația: $1 + \operatorname{tg} x = 4 \sin x \cos x$

(Facultatea de studii economice, Iași, 1971)

III. Fie expresia:

$$E = \frac{\cos 6x + 2 \cos 8x + \cos 10x}{\sin 6x + 2 \sin 8x + \sin 10x}.$$

Se cere:

a) Să se arate că se reduce la $E = \operatorname{ctg} 8x$;

b) Să se rezolve ecuația $E - \sqrt{3} = 0$;

c) Să se calculeze valoarea lui E pentru $x = \frac{\pi}{96}$.

IV. a) Să se rezolve ecuația:

$$x^2 \sin^2 b - 2x(1 - \cos a \cos b) + \sin^2 a = 0;$$

b) x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației de mai sus, să se calculeze:

$$E = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

(A.S.E., București)

V. Să se arate că pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ expresia:

$$E(x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x - 1 \text{ este pozitivă}$$

(A.S.E., București)

Timp de lucru: 150 minute

$$N = \frac{2\,N_I + 2{,}3\,N_{II} + 1{,}7\,N_{III} + N_{IV} + N_V}{8}.$$

TESTUL 16

I. Dacă $a + b + c = \pi$ să se arate că:

$$\frac{\sin b + \sin c - \sin a}{\sin b + \sin c + \sin a} = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

(A.S.E., București, 1970)

II. Se dă expresia:

$$E = \frac{\sin(a + b) - \sin a - \sin b}{\sin(a - b) - \sin a + \sin b}$$ și se cere:

a) Să se simplifice E;

b) Să se calculeze valoarea lui E pentru

$$a = \frac{\pi}{3} \quad b = \frac{\pi}{6};$$

c) Să se rezolve ecuația: $\operatorname{tg} x + \frac{E}{1 + \sqrt{3}} \operatorname{ctg} x = 0$

unde E are valoarea de la punctul b).

(I.P., București, 1970)

III. Să se rezolve ecuația:

$$\arcsin(1 - x) = \arccos(1 + x).$$

IV. Se consideră expresiile:

$$A = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x},\ B = 1 + \frac{5 \sin x - 2}{\cos^2 x},\ C = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

a) Să se rezolve ecuația:

$$2B = A + C.$$

b) Notînd cu α valoarea lui x mai mică decît $\frac{\pi}{2}$, determinată la punctul anterior, să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

(I.P., Timişoara, 1966, enunţ modificat)

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{N_I + 3\,N_{II} + 1{,}5\,N_{III} + 2{,}5\,N_{IV}}{8}.$$

TESTUL 47

I. Să se arate că pentru orice $n \in N$, expresia $E = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - n \operatorname{tg} 3x$ poate să fie scrisă sub formă de produs.

(I.P., Bucureşti)

II. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}\right)$$

şi se cere:

a) Să se aducă această expresie la forma cea mai simplă;

b) Să se afle valorile lui x pentru care expresia nu este definită.

III. Se consideră expresia:

$$E = \frac{1 + m(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

și se cere:

a) Să se exprime E în funcție de $\sin 2x$ și să se rezolve ecuația $E = 0$;

b) Să se exprime E în funcție de $\operatorname{tg} x$ și să se arate că există un m pentru care E nu depinde de x;

IV. Se consideră ecuația:

$$(2m + 3)\sin^2 x + (2m^2 + 5m + 5)\sin x + m + 1 = 0.$$

Se cere să se determine valorile lui m pentru care ecuația admite soluții.

Timp de lucru: 150 minute.

$$N = \frac{1{,}5\, N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV}}{4{,}5}.$$

TESTUL 18

I. Să se arate că dacă

$$A = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad B = \frac{1 - \sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad x \neq k\pi,$$

unde $k \in Z$, atunci sînt adevărate relațiile:

a) $\frac{A^2}{(1+A^2)^2}+\frac{B^2}{(1+B^2)^2}=\frac{1}{4}$;

b) $\frac{A^2}{(1-A^2)^2}+\frac{B^2}{(1-B^2)^2}+\frac{1}{2}=\left(\frac{\text{tg } x+\text{ctg } x}{2}\right)^2 \geqslant 1.$

(Concurs elevi, 1970)

II. Se consideră expresia

$$E(x)=p \sin 3x+q \sin 2x.$$

a) Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$E(x)=n \sin x$$

pentru $p=q=1$.

b) Să se afle valoarea expresiei $E(x)$ pentru:

$$p=1, \quad q=\frac{1-a^2}{2\sqrt{1+a^2}} \text{ și } 1-\text{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{a}\text{tg } x=\frac{2}{a}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1-\text{ctg}^2\frac{x}{2}} \text{ unde } x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ cu } a<0.$$

c) Considerînd expresia obținută la punctul b) după înlocuirea lui p și q să se determine n astfel ca ecuația în a,

$$E(a)=\frac{n}{\sqrt{1+a^2}}$$

să aibă o rădăcină mai mare decît 2 și cealaltă mai mică decît 2.

(Facultatea de studii economice, Timișoara, 1970)

Timp de lucru: 120 minute.

$$\text{N}=\frac{2\text{ N}_{\text{I}}+3\text{ N}_{\text{II}}}{5}.$$

TESTUL 19

I. Fie expresia:

$$E = \sqrt{3}\,(1 + \cos 4x)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}^2 2x\right).$$

Se cere:

a) Să se reducă expresia la forma: $E = k\cos(\alpha x - \beta)$ unde k, α, β sînt constante numerice.

b) Să se scrie expresia $E_1 = E + 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ sub o formă calculabilă prin logaritmi.

c) Să se rezolve ecuația: $E = 2\operatorname{tg} 2x$.

(I.P., București)

II. Fie sistemul de ecuații

$$\begin{cases} (a - b)\sin(x + y) - (a + b)\sin(x - y) = 0 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = ab. \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine arcele x și y pentru cazul cînd $a = -1$ și $b = \sqrt{3}$.

(I.P., Iași, 1967)

III. Să se arate că dacă $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ atunci:

$$\frac{\sqrt[4]{1 + \sin 2x} - \sqrt[4]{1 - \sin 2x}}{\sqrt[4]{1 + \sin 2x} + \sqrt[4]{1 - \sin 2x}} = \operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

(Concurs, 1972)

IV. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

a) Să se arate că se poate scrie sub forma:

$f(x) = A \sin(\alpha + x)$ unde A este constantă și $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se arate că putem scrie

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \operatorname{tg} mx + \sec mx$$

unde m este un număr natural.

c) Să se rezolve ecuația

$$f(x) + (2 + \sqrt{3})\, f(-x) = 0.$$

(I.P., București, 1971)

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{3\,N_{I} + 2\,N_{II} + 2\,N_{III} + 3\,N_{IV}}{10}.$$

TESTUL 20

I. Fie ecuația:

$2(2a + 1) \cos^2 x + 3 \cos x + 1 - a = 0$ unde $a \in R$.

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se determine a astfel încît ecuația să admită soluții în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(I.P., București — enunț parțial)

II. Fie ecuaţia

$p(\sin x + 1) - \sin^2 x = \cos 2x$. Se cere:

a) Să se determine valoarea parametrului p, pentru care ecuaţia admite două soluţii în $[0, 2\pi]$.

b) Să se rezolve ecuaţia pentru $p = \frac{1}{2}$.

c) Fără a rezolva ecuaţia dată, să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$ în funcţie de p.

(I.P., Timişoara, 1972)

III. Să se arate că:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$$

nu depinde de x.

(Concurs elevi, 1975)

Timp de lucru: 90 minute.

$$N = \frac{2\,N_I + 4\,N_{II} + N_{III}}{7}.$$

TESTUL 21

I. Să se afle valorile lui x pentru care:

a) $E_1 = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x| = 0$;

b) $E_2 = \operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x| = 0$;

c) $E_1 E_2 = 0$.

(G.M.F.B., 1960)

II. Să se afle valorile parametrului $a \in R$, pentru care ecuația:

$$2x^5 + x^4 \sin 4a - x^3 \sin 3a + x^2 \sin 2a - x \sin a + 2 = 0$$

admite o rădăcină $x = -1$.

(I.P., București, 1971 — enunț parțial)

III. Fie ecuația:

$$\cos^3 x + (a + a^2) \cos^2 x + (a^3 + a - 1) \cos x + a^3 - a = 0,$$

unde a este un parametru real.

a) Notînd $y = \cos x$ se obține o ecuație de gradul III în y cu o rădăcină egală cu -1. Să se rezolve ecuația astfel obținută.

b) Pentru $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, să se afle toate valorile lui x care verifică ecuația dată.

c) Fie $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \cos x_2$, $y_3 = \cos x_3$ rădăcinile ecuației obținute prin înlocuirea $y = \cos x$. Să se calculeze

$$E = \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2.$$

(I.P., București, 1971 — enunț modificat)

IV. Să se rezolve ecuația

$$\arccos (x - 1) = 2 \arccos x.$$

V. Să se rezolve sistemul

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\sin (x - y)}{a - b}.$$

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{2\,N_I + N_{II} + 3\,N_{III} + N_{IV} + 2\,N_V}{9}.$$

TESTUL 22

I. Fie funcția $f : R \to R$ dată de legea:

$$f(x) = \left(\frac{2 - \cos^2 a - 2|\sin a|}{1 + \sin^2 a}\right)^x$$

unde a este un parametru real.
Să se arate că această funcție de x este descrescătoare pentru orice valoare reală a parametrului a diferită de $\frac{k\pi}{2}$, unde $k \in Z$.

(Concurs, 1972)

II. Să se arate că dacă $x \in (0, 1)$, $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$, $\beta = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$, atunci $\alpha + \beta = \pi$.

III. Să se elimine x din relațiile:

$$\begin{cases} \operatorname{cosec} x - \sin x = m \\ \sec x - \cos x = n. \end{cases}$$

(A.S.E., București, 1971)

IV. Să se verifice identitatea

$$\cos 2x - 5 \cos x + 12 = \frac{\cos 3x + 55}{2 \cos x + 5}.$$

V. Să se rezolve ecuația

$$\lg [\operatorname{tg}(x - |x|)] = 0.$$

(I.P., Iași, 1971)

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{2 N_I + 2 N_{II} + N_{III} + N_{IV} + N_V}{7}.$$

TESTUL 23

I. Să se determine valorile lui $m \in R$ pentru care ecuaţia

$$m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1) \sin x - 3m + 1 = 0$$

admite rădăcini şi să se găsească aceste rădăcini.

(A.S.E., Bucureşti, 1969)

II. Să se calculeze expresia

$$(1 - \cos x + i \sin x)^n, \quad x \neq 2k\pi.$$

III. Să se demonstreze că triunghiul în care există relaţia

$$\operatorname{tg} B = \frac{\cos(C - B)}{\sin A + \sin(C - B)}$$

este dreptunghic.

IV. Să se afle locul geometric al imaginii numărului complex

$$z = 1 + t + (2t - 1)\,i, \quad t \in R.$$

V. Să se rezolve ecuaţia

$$\left(\frac{1 + i x}{1 - i x}\right)^m = a + b i.$$

Timp de lucru: 100 minute.

$$N = \frac{N_I + 2\,N_{II} + N_{III} + N_{IV} + 2\,N_V}{7}.$$

TESTUL 24

I. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC există una din relațiile:

a) $\sin C = \cos A + \cos B$ sau

b) $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$

triunghiul este dreptunghic, iar dacă există relația

c) $\sin A = 2 \sin B \cos C$

triunghiul este isoscel.

II. Să se rezolve ecuația

$$z^n - C_n^1 a z^{n-1} - C_n^2 a^2 z^{n-2} - \ldots - C_n^n a^n = 0,$$

a fiind o constantă reală diferită de zero.

III. Să se transforme în produs expresia

$$E = \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2 \frac{C}{2}}$$

unde a, b, c, A, B, C sînt elementele unui triunghi oarecare.

(Facultatea de Petrol și Gaze, 1952)

IV. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd:

1) Ipotenuza a și raportul $\dfrac{b}{c} = k$ al catetelor;

2) Ipotenuza a și produsul $bc = p$ al catetelor.

(A.S.E., București)

Timp de lucru: 90 minute.

$$N = \frac{N_I + 2\,N_{II} + N_{III} + N_{IV}}{5}.$$

TESTUL 25

I. Să se rezolve ecuația: $9 \cdot 4^{\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2\right)} = 1.$

II. Să se rezolve inecuația $\log_{2 \sin x} \sqrt{\cos 2x} \leqslant \frac{1}{2}$ pentru $x \in [0, 2\pi]$.

III. Se dă

$$\sin x + m \cos x = n,$$

unde m și n sînt parametri reali.

Se cere:

a) Să se calculeze în funcție de m și n valoarea expresiei

$$E = m \sin x - \cos x.$$

b) Să se arate că $\sin x + m \cos x = n$ se scrie

$(1 + m^2)t^2 - 2nt + n^2 - m^2 = 0$ dacă $\sin x = t$.

(Concurs elevi, 1972)

IV. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a \\ \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = b \end{cases}$$ și se cere:

a) Să se elimine x din sistemul dat stabilindu-se o relație $f(a, b) = 0$;

b) Presupunînd că $a = m$ și $b = \sin y$, să se determine valorile lui m pentru care ecuația obținută admite soluții în y.

V. Fie $A\,B\,C\,S$ un tetraedru regulat de muchie a.

a) Să se calculeze sinusul, tangenta și cosinusul unghiului său diedru.

b) Să se calculeze sinusul unghiului format de o muchie laterală cu baza sa.

Timp de lucru: 120 minute

$$N = \frac{N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV} + N_V}{5}.$$

TESTUL 26

I. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = \sin 2\alpha, \ \alpha \in R \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1 \end{cases}$$

Se cere:

a) Să se rezolve acest sistem, unde necunoscutele sînt x și y.

b) Dacă (x, y) este soluția sistemului să se arate că expresia

$$E = \frac{y}{1 + x} + \frac{x}{1 + y} + \frac{(1 - x)(1 - y)}{xy}$$

nu depinde de α.

c) Să se formeze ecuația de gradul II în z care are drept rădăcini pe $z_1 = \frac{1}{x}$ și $z_2 = \frac{1}{y}$, (x, y) fiind soluția sistemului.

d) Pentru ce valori ale lui α ecuația în z de la punctul c) are rădăcini egale?

c) Pentru ce valori ale lui $\alpha \in [0, 2\pi]$ ecuația în x are rădăcini de același semn?

(Institutul Pedagogic, Iași, 1968)

II. a) Înălțimea unei piramide hexagonale regulate este egală cu latura bazei a. Să se calculeze cosinusul unghiului a două fețe laterale adiacente.

b) Să se calculeze cosinusul aceluiași unghi, cînd înălțimea este h iar latura bazei a.

III. Să se determine numerele complexe z care satisfac ecuația:

$$|z|^2 - 2iz + 2a(1 + i) = 0, \text{ unde } a \geqslant 0.$$

Timp de lucru: 100 minute.

$$N = \frac{2\,N_I + 2\,N_{II} + N_{III}}{5}.$$

TESTUL 27

I. Fie ecuația

$$\cos^2 x - 2a \cos x + b = 0$$

cu necunoscuta cos x. Se cere

1) Ce relații trebuie să satisfacă a, b pentru ca ecuația dată să admită soluții distincte?

2) Dacă $\cos x_1$ și $\cos x_2$ sînt rădăcinile ecuației date, să se formeze ecuația care admite ca rădăcini pe $\cos 2x_2$ și $\cos 2x_1$.

(I.P., București, 1972)

II. Se consideră funcția

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^m \text{ și se cere:}$$

a) Pentru $m = 72$, să se scrie termenul liber și termenul care conține pe x^{28};

b) Pentru $m = 1$ să se rezolve ecuația

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x}.$$

(I.P., București, 1972)

III. Fie ecuația $f(x) = m(x^2 + 2x) + 2x^2 + 2x - 4 = 0$. Se cere să se determine parametrul $m \in R$ astfel încît să admită o rădăcină în intervalul $(-3, -1)$ și cealaltă rădăcină în intervalul $(3, 4)$.

IV. Să se afle n din ecuația:

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} + \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = 242.$$

V. Fiind dat triunghiul $ABC\left(A = 90° \text{ și } B = \frac{\pi}{6}\right)$ și înălțimea $AH = h$, se cere să se determine punctele $P \in AB$ și $Q \in AC$ astfel încît $\widehat{QHA} = \widehat{AHP} = x$ și în plus să fie satisfăcută relația

$$\frac{1}{HP} + \frac{1}{HQ} = \frac{2m}{h},$$

unde $m \in R$ este un număr dat.

Să se determine valorile lui m astfel încît punctele să fie situate pe laturi și nu pe prelungirile acestora.

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{2\,N_I + 2\,N_{II} + 1{,}5\,N_{III} + N_{IV} + 2{,}5\,N_V}{9}.$$

TESTUL 28

I. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + \ldots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x + 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x = 1.$$

II. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x;$$

pentru $\sin 2^k x \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

III. Să se arate că soluțiile ecuației:

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x},$$ sînt numai

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ unde } k \in Z,\ m,\ n, \in N.$$

IV. Într-o sferă de raza r se înscrie un con, a cărui generatoare face cu planul bazei un unghi dat de ecuația:

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 2 - \operatorname{tg} \alpha,\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

a) Să se determine la ce distanță de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferența ariilor secțiunilor determinate în sferă și con să fie egală cu aria bazei conului.

b) Să se exprime în funcție de r volumul tetraedrului regulat circumscris sferei.

(I.P., București)

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV}}{4}.$$

TESTUL 29

I. Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei, în funcție de ipotenuza a și de suma catetelor l.

II. Să se arate că polinomul

$$P(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)(\cos\beta + x\sin\beta) - \\ - x\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

este divizibil cu $x^2 + 1$.

III. Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \alpha,$$

unde α este un număr complex al cărui modul este egal cu 1.

IV. Să se rezolve un triunghi dreptunghic, cunoscînd perimetrul $2p$ și raza R a cercului circumscris.

V. Fie expresia

$$E(x) = \frac{2(1-\lambda)\cos^2 2x + \cos 2x + (2\lambda - 1)}{\lambda\sin^2 x + \sin(30^\circ + x)\sin(30^\circ - x)}.$$ Se cere:

a) Să se arate că expresia nu depinde de λ.

b) Să se rezolve ecuația

$$E(x) = 0.$$

(I.P., Brașov, 1971)

Timp de lucru: 120 minute.

$$N = \frac{N_I + 0{,}5\,N_{II} + 2\,N_{III} + N_{IV} + 1{,}5\,N_V}{7}.$$

TESTUL 30

I. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{\sec x}(13{,}25) = \log_{\operatorname{tg} x}(12{,}25) \text{ unde } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

(Concurs elevi, 1973)

II. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$2^{\sin x + \sin 2x} = 32^{\frac{\sin 3x}{a}}.$$

III. Se dau ecuațiile:

$$x^2 + px + q = 0 \text{ și } x^2 + p_1 x + q_1 = 0.$$

Prima ecuație admite ca rădăcini pe $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $x_2 = \operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Care este condiția ca ecuația a doua să admită ca rădăcini $x_1' = \sin\alpha$ și $x_2' = \sin\beta$?

IV. Pe cale trigonometrică să se arate că

$$\left|\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

V. Fiind dat un triunghi echilateral ABC de latură a și un punct $M \in BC$, ducem prin M paralelele MP și MQ la laturile AB și AC ($P \in AC$, $Q \in AB$).

a) Să se demonstreze că $AP + AQ = a$.

b) Să se calculeze AP și AQ în cazul în care cunoaștem $PQ = l$.

c) Să se calculeze $\cos P$ și $\cos Q$ în funcție de l și a, P și Q fiind unghiurile triunghiului APQ.

d) Să se calculeze unghiurile P și Q în cazul în care $l=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Timp de lucru: 120 minute.

$$N=\frac{N_I+N_{II}+N_{III}+N_{IV}+2N_V}{6}.$$

TESTUL 31

I. Să se rezolve ecuația

$$\log_{\cos x}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)+\log_{\frac{1}{2}-\cos x}\cos^2 x-3=0.$$

II. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este a, înălțimea piramidei este h. Să se calculeze tangenta unghiului format de două fețe laterale adiacente.

III. Să se rezolve ecuația

$$8\cdot 16^{\cos^2 x-1}+5(4^{\sin^2 x}-2^{\cos 2x})-16^{\sin^2 x}=2.$$

IV. Fie ecuația $x^2+2px+q=0$.

a) Să se determine relația dintre p și q astfel ca ecuația dată să aibă ca rădăcini $x_1=\cos\alpha$ și $x_2=\sin\alpha$.

b) Pentru ce valori ale lui p, arcul α aparține, succesiv, intervalelor:

$$1^\circ\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);\quad 2^\circ\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)\text{ sau }\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right);\quad 3^\circ\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right).$$

Timp de lucru: 120 minute.

$$N=\frac{N_I+N_{II}+N_{III}+N_{IV}}{4}.$$

TESTUL 1

I. Se amplifică fiecare fracție cu conjugata numitorului și în final rezultă $S = \sqrt{n}$.

II. $x^2+1>0$, $x^2+x+7>0$, $(x-5)^2>0$, $(\forall)\ x \in R$ deci $\frac{(3-x)(x-2)}{(-9-x^2)} \leqslant 0$, iar expresia este definită pentru $x \in R - \{5\}$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$3-x$		+		+	0	−	
$x-2$	−		0	+		+	
$-9-x^2$	−			−		−	
$E(x)$	+		0	−	0	+	

a) $x \in [2, 3]$
b) $x \in (-\infty, 2] \cup [3, 5) \cup (5, +\infty)$.

III. Pentru $x \in [0, +\infty)$: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$, $x_2 = 1$; pentru $x \in (-\infty, 0)$ ecuația este $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. Deci $A = \{1, 4\}$.

IV. a) Condiția este $\Delta = 0 \Rightarrow m_1 = 2$; $m_2 = -2$. b). Abscisa minimumului trebuie să fie zero; $\frac{m}{2} = 0 \Rightarrow m = 0$.

c) $\Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d) $\Delta < 0 \Rightarrow m \in (-2, 2)$.

V. a) $x_1 = 2x_2 \Rightarrow 3x_2 = \frac{2(m+1)}{m}$ și $2x_2^2 = \frac{m+2}{m}$,

$x_2 = \frac{2(m+1)}{3m}$ pe care îl introducem în ecuația a doua: $2 \cdot \frac{4(m+1)^2}{9m^2} = \frac{m+2}{m}$; rezolvînd ecuația rezultă: $m_1 = 2$, $m_2 = -4$.

b) $x_1^2 + x_2^2 = 1$; $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$ etc.

c) $x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow P = 1$; $\frac{m+2}{m} = 1 \Rightarrow 2 = 1$ — imposibil. Deci $m \in \phi$.

d) $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m}$; $x_1 x_2 = \frac{m+2}{m}$. Din a doua relație se obține $m = \frac{2}{x_1x_2 - 1}$ și introducînd în prima relație rezultă $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$.

TESTUL 2

I. $E_{(x,y)} = \frac{x + \sqrt{y} + 2}{x - 1}$ deoarece numărătorul se poate scrie:

$x^2 + 2x\sqrt{y} + y + 2(\sqrt{y} + x) = (x + \sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{x} + y)$.

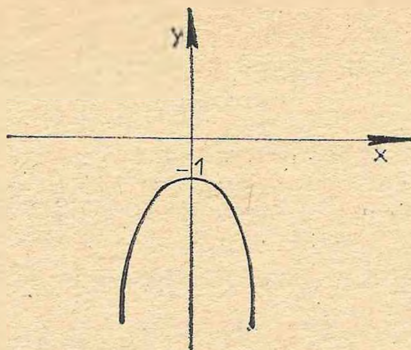


Fig. 89

II. Rădăcina este $x = \frac{13}{4}$. Evident, trebuie pusă condiția $x \in [1, +\infty)$.

III. Vezi figura 89.

IV. Revine la rezolvarea ecuației $|x^2 - 5x + 6| - |x^2 - 16| = 0$. Se explicitează modulele și se obține: pentru $x \in (-\infty, -4]$, ecuația $x^2 - 5x + 6 - x^2 + 16 = 0$; $x = \frac{22}{5} \notin (-\infty, -4]$,

pentru $x \in (-4, 2]$, ecuația $2x^2 - 5x - 10 = 0$; $x_1 = \frac{5 + \sqrt{105}}{4} \notin (-4, 2)$ și $x_2 = \frac{5 - \sqrt{105}}{4} \in (-4, 2)$;

pentru $x \in (2, 3)$, ecuația $5x - 22 = 0$; $x = \frac{22}{5} \notin (2, 3)$;

pentru $x \in [3, 4)$, ecuația $2x^2 - 5x - 10 = 0$; $x_1 = \frac{5 + \sqrt{105}}{4} \in [3, 4)$ și $x_2 = \frac{5 - \sqrt{105}}{4} \notin [3, 4)$;

pentru $x \in [4, +\infty)$, ecuația $-5x + 22 = 0$; $x = \frac{22}{5} \in [4, +\infty)$.

Deci graficul va intersecta axa Ox în punctele de abscisă

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{105}}{2}; \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{105}}{4}; \quad x_3 = \frac{22}{3}.$$

Observație. Se mai poate rezolva folosind relația $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$. Astfel, soluția se poate obține prin rezolvarea a două ecuații, fără alte condiții: $x^2 - 5x + 6 - x^2 + 16 = 0$ și $x^2 - 5x + 6 + x^2 - 16 = 0$.

V. $E_1(m) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2m = 2m(2m - 1)$; $E_2(m) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = 2(2m - 1)$; $m \neq 0$; $E_3(m) = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8m^3 - 6m^2 = 2m^2(4m - 3)$; $E_4(m) = 2(4m - 3)$; $m \neq 0$.

VI. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ cu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$.

VII. $x = -\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})$ trebuie să satisfacă ecuația, deci:

$$(m + 6)\left[-\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})\right]^2 - 4m\left[-\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})\right] + m + 1 = 0$$

și din rezolvarea ecuației în m se găsește valoarea lui $m \in R$, care corespunde condiției cerute.

TESTUL 3

I. $E_{(x)} = \frac{x + 2}{x + 4}$.

II. $\sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$, deci $|x - 2| = 1$.

Pentru $x \in [2, +\infty) \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$; pentru $x \in (-\infty, 2) \Rightarrow 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$; $A = \{1, 3\}$.

III. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$.

IV. Din $f(1) = 0$ și $f(-1) = 2 \Rightarrow a = 1$; $b = -1$.

V. $f(0) = 0 \Rightarrow m = 0$.

VI. $9 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-3,3]$.

VII. a) $\Delta = 0 \Rightarrow m_1 = 9$ și $m_2 = 25$. b) $S = 0 \Rightarrow m = 1$. c) $x_1x_2 = 1 \Rightarrow m = 15$.

VIII. Pentru existența radicalului trebuie ca: $8x^2 - (m-1)x + m - 7 \geqslant 0$ și fiindcă se găsește la numitor trebuie ca: $8x^2 - (m-1)x + m - 7 \neq 0$. Deci $8x^2 - (m-1)x + m - 7 > 0$. Cum $a = 8 > 0$ punem doar condiția $\Delta \leqslant 0$, deci $m \in [9, 25]$.

TESTUL 4

I. $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{10} - 2) + 3\sqrt{2}}{12}$.

II. a) $-5 \leqslant x - 2 \leqslant 5 \Rightarrow x \in [-3, 7]$.
b) Vezi figura 90.

III. Cazul 1. $x < 0$: $\left|\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}\right| > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|x^2 - x - 2| - |x^2 + x - 6|}{|x^2 + x - 6|} > 0.$$

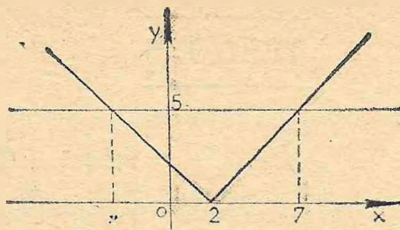


Fig. 90.

Explicităm modulele și obținem:

pentru $x \in (-\infty, -3) \Rightarrow \frac{-x+2}{x^2+x-6} > 0 \Rightarrow x \in$ $\in (-\infty, -3)$.

pentru $x \in (-3, -1) \Rightarrow \frac{x^2-4}{-x^2-x+6} > 0 \Rightarrow x \in (-3, -2)$,

pentru $x \in (-1, 0) \Rightarrow \frac{x-2}{-x^2-x+6} > 0 \Rightarrow x \in \Phi$.

Cazul 2. $x > 0$: $\frac{|x^2+x-2| - |x^2-x-6|}{|x^2-x-6|} > 0$.

Explicităm modulele și obținem:

pentru $x \in (0, 1) \Rightarrow \frac{-x-2}{-x^2+x+6} > 0 \Rightarrow x \in \Phi$;

pentru $x \in (1, 3) \Rightarrow \frac{x^2-4}{-x^2+x+6} > 0 \Rightarrow x \in (2, 3)$;

pentru $x \in (3, +\infty) \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-x-6} > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)$.

IV. a) $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$; b) $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 +$ $+ (x_1+x_2) = 2(1 - x_1x_2)$ unde $x_1 + x_2 = 2(m-2)$ și $x_1x_2 = m^2 - 1$. Înlocuind în expresia de mai sus se obține o ecuație de gradul doi în m cu soluțiile: $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{5}{2}$; c) $m \in \Phi$.

TESTUL 5

I. Revine la a rezolva sistemul $\begin{cases} x+y=63 \\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=2{,}05. \end{cases}$

Rezultă $x=35$ și $y=28$ sau $x=28$ și $y=35$.

II. $\begin{cases} 10x+y+9=10y+x \\ \dfrac{10x+y}{xy}=6 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=2.$

Numărul este 12.

III. Operațiile au sens pentru $a^2-x^2 \geqslant 0$ și $x \neq 0$, adică $x \in [-a,\ 0) \cup (0,\ a]$. Ecuația se scrie succesiv:

$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{|x|}\sqrt{a^2-x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=0.$$

În final se obține $x \in (0,\ a] \cup \{-a\}$.

IV. Fie a latura pătratului $ABCD$, iar l latura pătratului înscris. Aria pătratului înscris este minimă cînd $l^2 = x^2+(a-x)^2$ este minimă. Adică trinomul $2x^2 - 2ax + a^2$ trebuie să fie minim.

$x_{\min}=\dfrac{a}{2}$, aria minimă $=\dfrac{a^2}{4}$ (vezi fig. 91).

V. a) $m \in (-\infty,\ 0) \Rightarrow x_1, x_2 \in R,\quad x_1>0,\quad x_2<0,$ $|x_1|<|x_2|$; $m=0 \Rightarrow x_1=-x_2 \in R$;
$m \in (0,\ 1) \Rightarrow x_1, x_2 \in R,\ x_1<0,\ x_2>0,\ x_2>|x_1|$;
$m=1 \Rightarrow x_1=0,\ x_2>0$; $m \in (1,\ 2) \Rightarrow x_1,\ x_2 \in R,$
$x_1 \neq x_2,\ x_1>0,\ x_2>0$; $m=2 \Rightarrow x_1=x_2>0$;
$m \in (2,\ +\infty) \Rightarrow x_1,\ x_2 \in R,\ x_1>0,\ x_2>0,\ x_1 \neq x_2$.

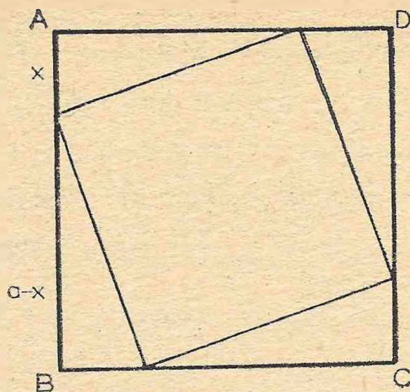


Fig. 91

b) $\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1+x_2} > x_1x_2 \Rightarrow \frac{-m+2}{m} > 0 \Rightarrow m \in (0, 2)$.

VI. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \Rightarrow 4m^3 - 9m^2 - m + 6 > 0 \Leftrightarrow 4m^3 - 4 - 9m^2 - m + 10 > 0 \Leftrightarrow 4(m-1)(m^2+m+1) - (9m^2+m-10) > 0$. Se descompune $9m^2 + m - 10$ și în final $m \in \left(-\frac{3}{4}, 1\right) \cup (2, +\infty)$.

TESTUL 6

I. Trebuie ca $x \in [0, 2]$. Ridicînd la pătrat se obține $|x - 1| = 1 - x$. Se scrie ecuația pentru $x \in [0, 1]$ și $x \in [1, 2]$. Rezultă $x \in [0, 1]$.

II. Se explicitează modulele și se rezolvă ecuațiile pe intervalele respective; $x \in (-\infty, -1] \cup \{2\}$.

III. $x + 7 \geqslant 0$, $2x - 3 \geqslant 0$ deci $x \geqslant \frac{3}{2}$. Dar concomitent trebuie $x + 7 < 4^2$ și $2x - 3 < 4^2$ deci $x < 3$ și $x < \frac{19}{2}$. Rezultă $x \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Ecuația se ridică de două ori la pătrat $\Rightarrow x^2 - 116\,x + 228 = 0$. Convine numai $x = 2$.

IV. a) $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2 \Rightarrow ay^2 - by + c = 0$. b) $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$ și rezultă $cy^2 + by + a = 0$. c) $y_1 = mx_1$; $y_2 = mx_2$ și rezultă $ay^2 + bmy + cm^2 = 0$. d) $y_1 = x_1 + h$, $y_2 = x_2 + h \Rightarrow ay^2 + (b - 2ah)y + ah^2 - bh + c = 0$. e) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2 \Rightarrow a^2y^2 - (b^2 - 2ac)\,y + c^2 = 0$. f) $c^2y^2 - (b^2 - 2ac)y + a^2 = 0$.

V. $a \Leftrightarrow c$; $b \Leftrightarrow d$.

VI. Vezi fig. 92. (Regiunea hașurată, inclusiv mulțimea punctelor dreptei).

VII. $|1 - x| = \begin{cases} 1 - x \text{ pentru } x \in (-\infty, +1] \\ x - 1 \text{ pentru } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

(Vezi fig. 93).

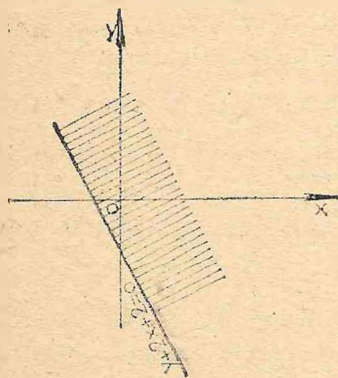


Fig. 92

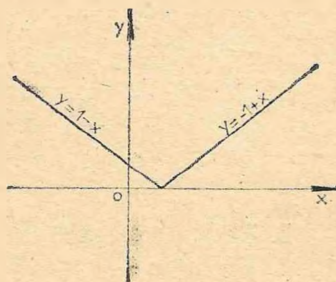


Fig. 93

TESTUL 7

I. Cum $-x^2 - 1 < 0$ și $5x^2 + x + 7 > 0$ pentru orice $x \in R$, va trebui să determinăm pe m astfel încît $(m^2 - 6 - m)x^2 - 2(m^2 - 1)x + m^2 + m < < 0$ $(\forall)\, x \in R$ adică $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ m^2 - m - 6 < 0. \end{cases}$

Rezultă $m \in \left[-1, -\frac{1}{5}\right]$.

II. Pentru $n = 2l \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Împărțim prin $\sqrt[n]{x^2 - 1}$ și obținem: $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{5}{2} = 0$. $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = u$ și rezultă $x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$ și $x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$. Pentru $n = 2l + 1 \Rightarrow x \in R - \{-1, 1\}$.

III. Are sens pentru $x \in [6, +\infty)$; $\sqrt{3x + 2} \geqslant 2 + \sqrt{x - 6} \Rightarrow \Rightarrow x^2 + 28 \geqslant 0$, fiind o sumă de două numere pozitive. Deci $x \in [6, +\infty)$.

IV. Fie h_1 și h_2 înălțimile corespunzătoare laturilor AC respectiv AB, iar D mijlocul lui BC. Notăm $MD = x$, $BC = a \Rightarrow MP^2 + MQ^2 = \frac{1}{4a^2} \cdot [h_1^2(a + 2x)^2 + h_2^2(a - 2x)^2]$.

Ordonăm după x și obținem un trinom de gradul II în x.

$x_{\min} = \frac{a}{2} \cdot \frac{|h_1^2 - h_2^2|}{h_1^2 + h_2^2}$ iar minimumul corespunzător este

$y_{\min} = \frac{h_1^2 \cdot h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$ (Vezi fig. 94).

V. Ecuația este de forma $x^2 - Sx + P = 0$, $S = m + 1$ deci $x^2 - (m + 1)x + P = 0$. $\Delta = (m + 1)^2 - 4P \Rightarrow$

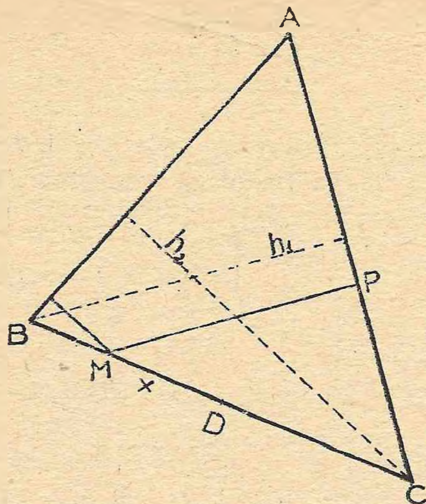


Fig. 94

$\Rightarrow P = \dfrac{(m+1)^2 - \Delta}{4} = \dfrac{6m-3}{4}$. Deci $4x^2 - 4(m + 1)x + 6m - 3 = 0$.

VI. Scriem relațiile dintre rădăcini și coeficienți:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\beta}{\alpha} \\ \alpha\beta = \dfrac{\Delta}{\alpha} \\ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\Delta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4},\ \beta = \frac{9}{4},\ \Delta = \frac{81}{64}.$$

Deci ecuația este $48x^2 - 144x + 81 = 0$.

VII. a) $P(x) = ax^2 + bx + c$. Punem condițiile din enunț și avem de rezolvat un sistem de ecuații cu necunoscutele $a, b, c \Rightarrow a = -1,\ b = (\alpha + \beta + \gamma),\ c = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x) = -x^2 + (\alpha + \beta + \gamma)x$. b) $m = -\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4}$.

TESTUL 8

I. După aducerea la același numitor, în fiecare paranteză, se ține seama de faptul că $x+2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$. Rezultă $E(x, y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ $\left(\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\; x \neq y\right)$.

II.

x	$-\infty$		0		2		3		4		13		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$ $+$		$+$	
$x^2-7x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$ $+$		$+$	
$13-x$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$ $+$	0	$-$	
$x-x^2-1$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$E(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

III. a) Se explicitează modulul și rezultă $x \in (-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

b) Vezi porțiunea hașurată din figura 95.

IV. Se explicitează modulele și se consideră toate cazurile posibile:

Rezultă $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{11}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$ și $y_2=\frac{11}{2}$.

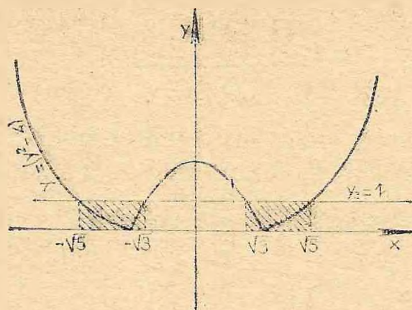


Fig. 95

V.

m	Δ	P	S	Discuții.
$m \in (-\infty, -2)$	+	+	—	$x_1, x_2 \in R$, $x_1<0$, $x_1 \neq x_2$, $x_2<0$
$m = -2$	0	+	—	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 = x_2 < 0$
$m \in \left(-2, -\frac{4}{3}\right)$	—	+	—	rădăcinile nu sînt reale.
$m = -\frac{4}{3}$	—	+	0	rădăcinile nu sînt reale. $x_1 = \frac{i}{3}$, $x_2 = -\frac{i}{3}$.
$m \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}\right)$	—	+	+	rădăcinile nu sînt reale
$m = -\frac{6}{5}$	0	+	+	$x_1 = x_2 > 0$ $x_1, x_2 \in R$
$m \in \left(-\frac{6}{5}, -1\right)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in R$, $x_1>0$, $x_1 \neq x_2$, $x_2>0$.
$m = -1$	+	0	+	$x_1, x_2 \in R$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$
$m \in (-1, +\infty)$.	+	+	+	$x_1, x_2 \in R$, $x_1>0$, $x_1 \neq x_2$, $x_2>0$

VI. a) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ 3-m>0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. b) $\begin{cases} \Delta \leqslant 0 \\ 3-m<0 \end{cases} \Rightarrow m \in \Phi$.

c) $P(0) \cdot P(3) < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{27}{2}, +\infty\right)$.

d) $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{27}{17}$ (Se elimină x_2 între sumă și produs). e) Inecuația nu are sens, fiindcă nu există nici o valoare a lui m astfel ca $x_1 > 0$ și $x_2 > 0$. (În enunț $m \neq 0$.)

TESTUL 9

I. a) $\Delta = [a(a-2)]^2 + [2(a-1)]^2$. Fiind o sumă de pătrate, $\Delta > 0$, $(\forall)\ a \in R$; $x_1 = -1$, $x_2 = (a-1)^2$. b) $x_1 + x_2 = a(a-2)$; $x_1 x_2 = -(a-1)^2$ deci $2\sqrt{(a-2)^2} - 3\sqrt{(a-1)^2} \geqslant 1$, adică $2|a-2| - 3|a-1| \geqslant 1$, de unde rezultă $a \in \left[0, \frac{6}{5}\right]$.

II. a) Se elimină parametrul m din relațiile $x = -\frac{m+1}{m}$ și $y = -\frac{1}{m}$ de unde rezultă condiția cerută.

b) $|AB| = |x_2 - x_1| = \frac{2}{m}$ $\quad |FV| = \left|-\frac{1}{m}\right|$.

c) Se ordonează ecuația după m și se află punctul fix al familiei de parabole:

$$m(x^2+2x+1)+2x+2-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x+1=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-1, 0)$.

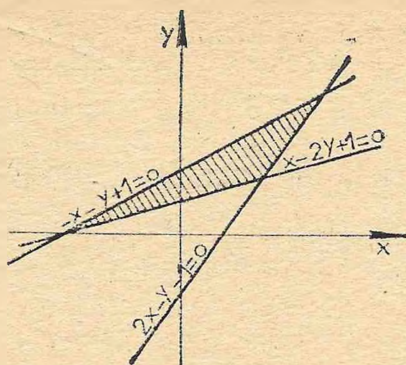


Fig. 96

III. Funcția g este dată de legea:

$$g(x) = 2 - |2 - |x|| = \begin{cases} x + 4 \text{ pentru } x \in (-\infty, -2] \\ -x \text{ pentru } x \in (-2, 0] \\ x \text{ pentru } x \in (0, 2] \\ 4 - x \text{ pentru } x \in (2, +\infty] \end{cases}$$

Reprezentarea grafică nu prezintă dificultate.

IV. Porțiunea hașurată din figura 96.

TESTUL 10

I. Notăm cu log, $x = u$, $\log_x y = v$, $\log_x z = t$, iar sistemul devine

$$\begin{cases} ut + v = 3 & (1) \\ vt - u = 4 & (2) \\ ut + vt + u - v = 1 & (3) \end{cases}$$

Din ecuația (3) se scad ecuațiile (1) și (2) și rezultă $u = v - 3$ care se înlocuiesc în (1) și (2) obținîndu-se

$$\begin{cases} vt + v - 3t = 3 & (1') \\ vt - v = 1 & (2') \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{t-1}$$

care se introduce în (1'). În final

$$\begin{cases} \log_\alpha x_1 = -\frac{7}{2} \\ \log_\alpha y_1 = -\frac{1}{2} \\ \log_\alpha z_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha^{-\frac{7}{2}} \\ y_1 = \alpha^{-\frac{1}{2}} \\ z_1 = \alpha^{-1} \end{cases}.$$

Analog se obține

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = \alpha^3 \\ z_2 = \alpha^{\frac{4}{3}} \end{cases}.$$

II. Ecuația se scrie $(x-1)[x^2 + (2m-1)x + m + 1] = 0$. Rămîne deci să discutăm natura și semnul rădăcinilor ecuației: $x^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$. Pentru $m \in (-\infty, -1)$, $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < 0$; $x_2 > 0$; $|x_1| < x_2$; $m = -1$, $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 > 0$ reale; pentru $m \in \left(-1, \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right) \Rightarrow$ rădăcini reale $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$ $x_1 \neq x_2$.

Pentru $m = \frac{2-\sqrt{7}}{2}$, $x_1, x_2 \in R$, $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$; pentru $m \in \left(\frac{2-\sqrt{7}}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rădăcinile nu sînt reale; pentru $m = \frac{2+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{7}+1}{2}$; pentru $m \in \left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$,

$\Rightarrow x_2 < 0$, $x_1 < 0$, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

b) $x_2^3 + x_3^3 = 5 \Rightarrow (x_1 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = 5 \Rightarrow 8m^3 - 18m^2 + 3m + 7 = 0 \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = -\frac{1}{2},\ m_3 = \frac{7}{4}$.

c) $x_{2,3} = \frac{1 - 2m \pm \sqrt{4m^2 - 8m - 3}}{2}$; $|x_2 - x_3| = \sqrt{4m^2 - 8m - 3}$ deci ecuația este

$$\lg \frac{\sqrt{4m^2 - 8m - 3}}{2} - \lg(5m - 6) + \lg(m + 3) = 0$$

sau

$$\lg \frac{(m + 3)\sqrt{4m^2 - 8m - 3}}{2(5m - 6)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(m + 3)\sqrt{4m^2 - 8m - 3}}{2(5m - 6)} = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (m - 3)\ (4m^3 + 28\ m^2 - 31\ m + 57)$, deci rădăcina rațională este $m = 3$.

III. Pentru determinarea cuplurilor (x, y) trebuie rezolvat sistemul:

$3|x| + 2y = 1$
$x + 3|y| = 15$

Se vor explicita modulele și se vor considera cazurile:

$1°\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ $2°\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases}$ $3°\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ $4°\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases}$

și se găsește $S = \{3, -4\}$.

IV. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$. Deci

$2^n + 240 = 2^{2n}$, de unde se determină n. $T_3 = 120x^6\sqrt[3]{x}$.

V. $x = 8$.

TESTUL 11

I. Notăm $\log_{a^n} b^n = y \Rightarrow b^n = a^{ny}$. Logaritmăm în baza a și obținem: $n \log_a b = ny \Rightarrow \log_a b = y = \log_{a^n} b^n$. Folosind egalitatea stabilită în ecuația propusă se obține $\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 x^2$ și $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x^{-1}$. Deci ecuația devine: $\log_2 x^2 = 2 \Rightarrow x = 2$.

II. Folosim proprietățile proporțiilor:

$$\frac{E+1}{1} = \frac{2\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x-1}}$$

(am adunat numitorii la numărători);

$$\frac{E-1}{1} = \frac{2\sqrt[n]{x-1}}{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x-1}}$$

(am scăzut numitorii din numărători).

Împărțim relațiile: $\frac{E+1}{E-1} = \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}$. Dar

$$x+1 = \frac{2^n + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-3}C_n^3 + \ldots}{2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + \ldots},$$

$$x-1 = \frac{2^n - 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 - 2^{n-3}C_n^3 + \ldots}{2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + \ldots}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2^n + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-3}C_n^3 + \ldots}{2^n - 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 - 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-4}C_n^4 + \ldots} =$$

$$= \frac{(2+1)^n}{(2-1)^n} = 3^n.$$

Deci $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 3 \Rightarrow \frac{E+1}{E-1} = 3 \Rightarrow E = 2.$

III. $2C_m^2 = C_m^1 + C_m^2$; $m \geqslant 3 \Rightarrow m = 7$. $T_6 = C_7^5 a^2 b^5 =$
$= 21 \cdot 2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3}$.
$2^{\lg(10-3^x)+\lg 3^{x-2}} = 2^0 \Leftrightarrow (10 - 3^x) \cdot 3^{x-2} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$; $3^x = y \Leftrightarrow y^2 - 10y + 9 =$
$= 0 \Rightarrow 3^x = 1$ și $3^x = 9 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

IV. $x_1 = 81,\ y_1 = 16$ sau $x_2 = 16,\ y_2 = 81.$

TESTUL 12

a) Din ecuația a II-a $y = mx - 3$ și înlocuind în prima ecuație se obține o ecuație de gradul doi avînd rădăcinile $x_1 = \frac{2}{m+2}$ și $x_2 = \frac{4}{m-2}$ cu $m \neq -2$, $m \neq 2$; $y_1 = -\frac{m+6}{m+2}$ și $y_2 = \frac{m+6}{m-2}$; $m = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = -2$; $m = -2 \Rightarrow x_2 = -1$, $y_2 = -1$.

b) $\frac{2}{m+2} = \frac{4}{m-2}$, $\frac{-m-6}{m+2} = \frac{m+6}{m-2} \Rightarrow m = -6$ cu rădăcinile $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$.

c) Soluțiile sistemului se scriu: $x_1 = \frac{2}{m+2}$; $y_1 = -1 - \frac{4}{m+2}$; $x_2 = \frac{4}{m-2}$; $y_2 = 1 + \frac{8}{m-2}$.

Pentru ca x_1 și y_1 să fie numere întregi trebuie ca $m+2$ să fie divizor al lui 2, iar pentru ca x_2 și y_2 să fie întregi trebuie ca $m-2$ să fie divizor al lui 4. Deci m trebuie să satisfacă simultan una din relațiile:

$$(1)\ \begin{cases} m+2=\pm 1 \\ m+2=\pm 2 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} m-2=\pm 1 \\ m-2=\pm 2 \\ m-2=\pm 4 \end{cases}$$

Se observă că numai pentru $m=0$ ambele condiții sînt satisfăcute astfel că soluțiile întregi sînt:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -3. \end{cases}$$

d) $x_1 > 0$, $y_1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{m+2} > 0$ și $-\frac{m+6}{m+2} > 0$, $m \in (-6, -2) \cap (-2, +\infty) = \Phi$ deci nu există $m \in R$ astfel ca $x_1 > 0$ și $y_1 > 0$. Pentru $m \in (2, +\infty)$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$.

II. a) $x > 0$. Ecuația se scrie $x^2 - 3mx + m^2 = 0$, $x_{1,2} = \frac{m(3 \pm \sqrt{5})}{2}$; ambele pozitive pentru $m > 0$.

b) $f(x) = x^2 - 3mx + m^2 = 0$ are numai o rădăcină în intervalul $(0, 1)$ dacă $f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow m \in \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

c) Pentru ca expresia să existe trebuie ca $x^2 - 8 > 0 \Rightarrow \Rightarrow x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ fiindcă numitorul există pentru orice $x \in R$ datorită faptului

că $x^2 - 5x + 7 > 0$ fiindcă $\Delta < 0$. Logaritmul de la numărător, fiind în bază supraunitară, rezultă că $\log_3(x^2 - 8) > 0$ pentru $x^2 - 8 > 1$, adică pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
$\log_3(x^2 - 8) < 0$ pentru $0 < x^2 - 8 < 1$ adică pentru $x \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$. Baza logaritmului de la numitor fiind subunitară numitorul este pozitiv pentru $x^2 - 5x + 7 < 1 \Rightarrow x \in (2, 3)$. În final rezultă tabelul.

x	$-\infty \quad -3 \quad -2\sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \quad 3 \quad +\infty$
$\log_3(x^2 - 8)$	$+ \ 0 \ - \quad \vert \quad\quad \vert \quad - \ 0 \ +$
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 7)$	$- \ \vert \ - \quad \vert \quad\quad \vert \quad + \ 0 \ -$
$E(x)$	$- \ 0 \ + \quad \vert \quad\quad \vert \quad - \ \vert \ -$

deci pentru $x \in (-3, 2\sqrt{2}) \Rightarrow E_{(x)} > 0$ și pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (2\sqrt{2}, 3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow E_{(x)} < 0$.

III. $T_{k+1} = C_m^k (a\sqrt[3]{a})^{m-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k$; $C_m^2 - C_m^1 = 35$;

$$\frac{m(m-1)}{2} - m = 35 \Rightarrow m = 10.$$

$T_{k+1} = C_{10}^k a^{\frac{40-4k}{3} - \frac{k}{2}}$; $\frac{40 - 4k}{3} - \frac{k}{2} = 6 \Rightarrow k = 4$;

$T_5 = 210\ a^6$.

TESTUL 13

I. a) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$
$= [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2$.
$(a^2 - 4)^2 - 2 \cdot 4 = 17$. Notăm $a^2 = y \Rightarrow y^2 - 8y -$
$- 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 3$; $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$,
$x_2 = -2$; $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) Împărțind ecuațiile: $x = \dfrac{p}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$,

$y = \dfrac{q}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$.

c) Se simplifică mai întîi expresia:

$$E(x, y) = \frac{x + y}{x - y} \Rightarrow E(p, q) = \frac{p + q}{p - q}.$$

II. Logaritmii sînt definiți pentru $3 + 2x - x^2 > 0$ și $x > 0$, adică pentru $x \in (0, 3)$. Se ține seama de egalitatea $2 = \log_2 4$ și se obține în final,

$$x \in (0,1) \cup \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, 3\right).$$

III. $1 + C_n^1 + C_n^2 = 22 \Rightarrow n = 6$; $C_6^2 2^{4 \cdot \frac{x}{2}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{1-x}{2}} +$

$$+ C_6^4 2^{2 \cdot \frac{x}{2}} \cdot 2^{4 \cdot \frac{1-x}{2}} = 135.$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

IV. a) $2^x + a \cdot 3^x = 2(2^x - a \cdot 3^x) \Rightarrow x \log_b 3 + \log_b 3 +$

$+ \log_b a = x \log 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log_b 3 + \log_b a}{\log_b 2 - \log_b 3}$; $\quad b \neq 1$, $b > 0$.

b) $x = 1 \Rightarrow \dfrac{\log_b a + \log_b 3}{\log_b 2 - \log_b 3} = 1 \Rightarrow \log_b a =$

$$= \log_b \frac{2^1}{3^2} \Rightarrow a_1 = \frac{2^1}{3^2}.$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{\log_b a + \log_b 3}{\log_b 2 + \log_b 3} = 2 \Rightarrow \log_b a =$$

$$= \log_b \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{2^2}{3^3}.$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{\log_b a + \log_b 3}{\log_b 2 - \log_b 3} = 3 \Rightarrow \log_b a =$$

$$= \log_b \frac{2^3}{3^4} \Rightarrow a_3 = \frac{2^3}{3^4}.$$

. . . .

$$x = n \Rightarrow \frac{\log_b a + \log_b 3}{\log_b 2 - \log_b 3} = n \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}.$$

$$x = -1 \Rightarrow a'_1 = \frac{1}{2}; \quad x = -2 \Rightarrow a'_2 = \frac{3}{2}, \ldots,$$

$$x = -n \Rightarrow a'_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}.$$

Relațiile obținute se verifică prin inducție.

TESTUL 14

I. $\sin\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2\alpha}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{ctg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2\alpha}}$.

Ținînd seama că $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ rezultă

$$\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

II. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ deci $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} =$

$= -\sqrt{3}$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$.

III. $E = [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \cdot [\sin(a+b) - \sin(a - b)] = 2 \sin a \cos b \cdot 2 \sin b \cos a = \sin 2a \sin 2b$.

IV. Se știe că $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°$ și $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$. Deci

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 2(\sin 45° + \sin 60°) = 4 \sin \frac{105°}{2} \cos \frac{15°}{2}$.

V. $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = a \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = a \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{a}$;

$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - \frac{8}{a^2}$.

Rezultă $E = a(a^2 - 3)$; $F = \left(\frac{a+1}{a}\right)^2$.

VI. a) $\sin x = \frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{-4}{5}$; $E_1 = 2 \sin 2x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{312}{125}$; $E_2 = 2 \cos x(\cos 2x - \sin x) = -\frac{296}{125}$.

b) $\cos x - \frac{1}{2} = \cos x - \cos \frac{\pi}{3}$ deci

$$E_1 = 4 \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right),$$

iar $\cos 2x - \sin x = \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow E_2 =$

$= 4 \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

c) Ecuația $E_1 = E_2$ se reduce la $\cos x = 0$ și $\operatorname{tg} 2x = 1$;

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

VII. $\frac{(\sin a + \sin 5a) + \sin 3a}{(\cos a + \cos 5a) + \cos 3a} = \frac{2 \sin 3a \cos 2a + \sin 3a}{2 \cos 3a \cos 2a + \cos 3a} =$

$$= \frac{\sin 3a(2 \cos 2a + 1)}{\cos 3a(2 \cos 2a + 1)} = \operatorname{tg} 3a, \quad 2 \cos 2a + 1 \neq 0.$$

VIII. *Metoda I*: $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°)$ etc.

Metoda II: $\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{1 + \cos 30°}}$ etc.

Metoda III: $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°)$ etc.

IX. $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{12}$.

TESTUL 15

I. a) $F = 2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 3x$. Rezultă $F = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$;

b) $F = 4 \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $x_1 = \frac{k\pi}{2}$; $x_2 = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$; $x_3 = -\frac{\pi}{2} - 4k\pi$;

$$x_4 = \frac{3\pi}{2} - 4k\pi.$$

II. a) $E = \frac{[\sin(x+y) + \sin(x-y)][\sin(x+y) - \sin(x-y)]}{\sin 2y}$.

Se transformă în produs fiecare paranteză de la numărător și rezultă: $E(x) = \sin 2x$.

b) Revine la a rezolva ecuația: $\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$

$x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$.

c) $1 + \operatorname{tg} x = 2 \sin 2x$, $\operatorname{tg} x + 1 = \frac{4 \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow x_1 =$
$= k\pi + \frac{\pi}{4}$; $x_2 = k\pi + \frac{\pi}{8}$; $x_3 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{2}+1) +$
$+ k\pi$.

III. a) $E = \frac{(\cos 10x + \cos 6x) + 2 \cos 8x}{(\sin 10x + \sin 6x) + 2 \sin 8x} =$

$= \frac{2 \cos 8x \cos 2x + 2 \cos 8x}{2 \sin 8x \cos 2x + 2 \sin 8x} = \frac{\cos 8x}{\sin 8x} = \operatorname{ctg} 8x.$

b) $\operatorname{ctg} 8x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$.

c) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}}} = 2 + \sqrt{3}.$

IV. a) $x_{1,2} = \frac{1 - \cos a \cos b \pm (\cos a - \cos b)}{\sin^2 b}$;

$x_1 = \frac{(1-\cos b)(1+\cos a)}{\sin^2 b} = \frac{4 \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2}}{4 \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{b}{2}} =$

$= \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{b}{2}}$; $x_2 = \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{b}{2}}$;

b) $$E=\frac{\dfrac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}-\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}+\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}}}=\frac{\sin\frac{b-a}{2}}{\sin\frac{b+a}{2}}.$$

V. $$\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x-1=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-1=$$

$$=\frac{\sin 2x\cos x-\sin x\cos 2x}{\sin x\sin 2x}-1=\frac{\sin x}{\sin x\sin 2x}-$$

$$-1=\frac{1}{\sin 2x}-1>0,$$ deoarece pentru $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sin x\in(0,1)\Rightarrow\frac{1}{\sin 2x}>1.$$

TESTUL 16

I. $$E=\frac{4\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}{4\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}=\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

II. a) $E = \dfrac{2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2} - 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}}{2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}} =$

$$= \frac{2\sin\dfrac{a+b}{2}\left(\cos\dfrac{a+b}{2} - \cos\dfrac{a-b}{2}\right)}{2\sin\dfrac{a-b}{2}\left(\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{a+b}{2}\right)} = -\frac{\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{a-b}{2}}.$$

S-a utilizat și formula $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

b) $E = -\dfrac{\sin\dfrac{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}}{2}}{\sin\dfrac{\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}}{2}} = -\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{12}} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}} = -\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}-1} = -\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} =$$

$$= -(\sqrt{3}+1).$$

c) Ecuația devine $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$.

III. Stabilim mai întîi domeniul de existență:

$$\begin{cases} |1-x| \leqslant 1 \\ |1+x| \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant 1-x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 1+x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,\ 2] \\ x \in [-2,\ 0] \end{cases}$$

Datorită faptului că pentru $x = 0$ ecuația nu este verificată, înseamnă că această ecuație nu admite nici o soluție.

IV. a) Se obține ecuația $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}.$$

b) $$E = \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} + \frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}} = 2.$$

TESTUL 17

I. $$E = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - n\frac{\sin 3x}{\cos 3x} =$$

$$= \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x \cos 3x}(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x -$$

$$- n\cos x \cos 2x) = -\frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}[(n-2)\cos 2x + 1].$$

Pentru $n = 1 \Rightarrow E = -\operatorname{tg} 3x \dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x} =$

$$= -\operatorname{tg} 3x \frac{2\sin x \cdot \cos x \sin x}{\cos 2x \cos x} = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Pentru $n=2 \Rightarrow E=-\frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}$. Pentru $n=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow E=-\operatorname{tg} 3x=\frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}$. Pentru $n>3 \Rightarrow E=$

$=-(n-2)\frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}\left(\cos 2x+\frac{1}{n-2}\right); 0<\frac{1}{n-2}<1.$

Vom nota $\frac{1}{n-2}=\cos\alpha$ și

$$E=-2(n-2)\operatorname{tg} 3x\frac{\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos 2x}.$$

II. a) Cum $|\sin x|\leqslant 1$; $|\cos x|\leqslant 1$ rezultă că expresiile de sub radicali sînt pozitive:

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=$$

$$=\frac{(1-\sin x)-(1+\sin x)}{\sqrt{\cos^2 x}}=-\frac{2\sin x}{|\cos x|}.$$

$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=-\frac{2\cos x}{|\sin x|}$. Rezultă

$$E(x)=4\frac{\sin x\cos x}{|\sin x|\,|\cos x|}.$$

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x \text{ pentru } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\\ -\cos x \text{ pentru } x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right).\end{cases}$$

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x \text{ pentru } x\in[0,\pi]\\ -\sin x \text{ pentru } x\in(\pi,2\pi).\end{cases}$$

$$\text{deci } F(x) = \begin{cases} 4 \text{ dacă } x \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ -4 \text{ dacă } x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, \ (2k+1)\pi\right) \\ +4 \text{ dacă } x \in (2k+1)\pi, \ \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \\ -4 \text{ dacă } x \in \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(k+1)\pi\right). \end{cases}$$

b) Nu este definită pentru $1 + \sin x = 0$, $1 - \sin x = 0$, $1 + \cos x = 0$, $1 - \cos x = 0$. Rezolvînd aceste ecuații găsim valorile lui x pentru care nu este definită expresia.

III. a) $E = \frac{1 + m[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x]}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)} =$

$$= \frac{1 + m\left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right)}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} = 2\frac{2m + 2 - m\sin^2 2x}{4 - 3\sin^2 2x}.$$

$E = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{2(m+1)}{m}$. Pentru a exista soluția trebuie ca $0 \leqslant \frac{2(m+1)}{m} \leqslant 1$ deci $m \in [-2, -1]$;

$2x = k\pi \pm \arcsin\sqrt{\frac{2(m+1)}{m}}$.

b) $E = 2 \cdot \frac{(m+1)\text{tg}^2 x - m \text{ tg } x + m + 1}{2 \text{ tg}^2 x - 3 \text{ tg } x + 2}$ am folosit $\sin 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}$. E nu depinde de m dacă $\frac{m+1}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 3$. $E = -2$.

IV. Pentru $m \neq -\frac{3}{2}$, $\sin x_1 = -\frac{1}{2m+3}$ și $\sin x_2 = -\frac{m+1}{2}$, deci trebuie ca: $-1 \leqslant \frac{1}{2m+3} \leqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ și $-1 \leqslant \frac{m+1}{2} \leqslant 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \in [-3, 1]$.

Pentru $m = -\frac{3}{2}$ din ecuație rezultă că există soluții.

Deci ecuația are soluții pentru orice $m \in R$.

TESTUL 18

I. a) $A^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; $B^2 = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; $1 + A^2 = \frac{2}{1+\cos x}$; $1 + B^2 = \frac{2}{1+\sin x}$.

$\frac{A^2}{(1+A^2)^2} = \frac{\sin^2 x}{4}$; $\frac{B^2}{(1+B^2)^2} = \frac{\cos^2 x}{4}$ deci $\frac{\sin^2 x}{4} + \frac{\cos^2 x}{4} = \frac{1}{4}$.

b) $1 - A^2 = \frac{1+\cos x - 1 + \cos x}{1+\cos x} = \frac{2\cos x}{1+\cos x}$;

$1 - B^2 = \frac{2\sin x}{1+\sin x}$.

$$\frac{A^2}{(1-A)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x; \quad \frac{B^2}{(1-B^2)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2 x;$$

$$E(x)=\frac{1}{4}(\text{tg}^2x+\text{ctg}^2x+2)=\left(\frac{\text{ctg}\,x+\text{tg}\,x}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(\text{tg}\,x+\frac{1}{\text{tg}\,x}\right)^2}{4}.$$ Dar $\left|\text{tg}\,x+\frac{1}{\text{tg}\,x}\right|\geqslant 2$, deci $\left(\text{tg}\,x+\frac{1}{\text{tg}\,x}\right)^2\geqslant 4\Rightarrow E(x)\geqslant 1$.

II. a) $\sin 3x+\sin 2x=n\sin x$; $\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$; $4\cos^2x+2\cos x-n-1=0$.

$\cos x_1=\frac{-1+\sqrt{4n+5}}{4}$; $\cos x_2=\frac{-1-\sqrt{4n+5}}{4}$;

$n\geqslant-\frac{5}{4}$.

Pentru prima rădăcină trebuie:

$-1\leqslant\frac{-1+\sqrt{4n+5}}{4}\leqslant 1$ sau $-3\leqslant\sqrt{4n+5}\leqslant 5$

deci $n\in\left[-\frac{5}{4},\,5\right]$; $\cos x_2$ este rădăcină dacă $-1\leqslant$

$\leqslant\frac{-1-\sqrt{4n+5}}{4}\leqslant 1$ deci $n\in\left[-\frac{5}{4},\,1\right]$.

b) $E(x)=\sin 3x+\frac{1+a^2}{2\sqrt{1+a^2}}\sin 2x$; iar din relația dintre x și a avem succesiv:

$$1-\text{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{a\left(1-\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}$$

sau:

$$1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{a\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}.\ \text{Cum}\ \frac{x}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),$$

simplificăm cu $1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\neq 0$. Rezultă $a=\operatorname{tg} x$,

iar $\sin x=\pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}$ fiindcă $\sin x>0$

şi $a<0$; $\sin 3x=-\frac{a(3-a^2)}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}$; $\sin 2x=$

$$=-\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}\left(-\sqrt{1-\frac{a^2}{1+a^2}}\right)=\frac{2a}{1+a^2},\ \cos x<0,$$

pentru $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Deci $E(x)=-\frac{a(3-a^2)}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}+\frac{1-a^2}{2\sqrt{1+a^2}}\cdot$

$$\cdot\frac{2a}{(1+a^2)}=-\frac{-2a}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}.$$

c) ecuaţia este: $\frac{-2a}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}=\frac{n}{\sqrt{1+a^2}}$

sau $na^2+2a+n=0$. Are rădăcinile reale dacă $1-$ $-n^2\geqslant 0$ adică $n\in[-1,\ 1]$. Pentru ca $x_1<2<x_2$ trebuie $nf(2)<0$ sau $n(5n+4)<0\Rightarrow$

$$\Rightarrow n\in\left(-\frac{4}{5},0\right).$$

TESTUL 19

I. a) $E = 2\cos^2 2x\left(\sqrt{3} + 2\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sqrt{3}\,\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\right) =$

$= 2\cos^2 2x\,\frac{\sqrt{3}\cos^2 2x - \sqrt{3}\sin^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x} =$

$= 2\left(\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right) =$

$= 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$. Deci $k = 4,\ \alpha = 4\ \beta = \frac{\pi}{6}$.

b) $E_1 = 4\left[\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 4\left[\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right] =$

$= 8\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

c) $\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x = \operatorname{tg} 2x$. Notăm $\operatorname{tg} 2x = t$;
$\sin 4x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 4x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \sqrt{3}(1-t^2) +$
$+ 2t - t(1+t^2) = 0$; $\operatorname{tg} 2x = \pm 1$ și $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$
etc.

II. a) $\begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{a+b}{a-b} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{\sin(x+y)+\sin(x-y)} = \frac{b}{a} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = ab \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = \frac{b}{a} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = \pm b \\ \operatorname{tg} x = \pm a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = k_1\pi \pm \operatorname{arc\,tg} a \\ y = k_2\pi \pm \operatorname{arc\,tg} b. \end{cases}$

Pentru $a = -1$ și $b = \sqrt{3}$ soluțiile sînt $x = k_1\pi \pm$ $\pm \frac{\pi}{4}$; $k_1 \in Z; y = k_2\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $k_2 \in Z$.

III. $\sqrt[4]{1 + \sin 2x} = \sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{\sin x + \cos x}$; $\sqrt[4]{1 - \sin 2x} = \sqrt{\sin x - \cos x}$.

Evident $\sin x > \cos x$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$$E = \frac{\sqrt{\sin x + \cos x} - \sqrt{\sin x - \cos x}}{\sqrt{\sin x + \cos x} + \sqrt{\sin x - \cos x}} =$$

$$= \frac{2 \sin x - 2\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}}{2 \cos x} = \operatorname{tg} x - \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

IV. a) Se ține seama de egalitatea $\sin^2 a - \sin^2 b =$ $= \sin(a + b) \sin(a - b)$ deci $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Rightarrow A = \sqrt{2};\ \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

b) $$\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x + \sec 2x$$

deci $m = 2$.

c) $$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

sau: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+(2+\sqrt{3})\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0;$

$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2-\sqrt{3} \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=y$ și calculăm

$\operatorname{tg} 2y=\frac{2 \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}=\frac{-2(2+\sqrt{3})}{1-(7+4\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ deci

$2y=k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12} \Rightarrow x=k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\ (k\in Z).$

TESTUL 20

I. a) $\cos x=\frac{a-1}{2a+1}$ și $\cos x=-\frac{1}{2}$; $x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$,

dar $|\cos x|\leqslant 1 \Rightarrow \left|\frac{a-1}{2a+1}\right|\leqslant 1 \Rightarrow a\in(-\infty,-2]\cup$ $\cup[0,+\infty)$.

Pentru ca ecuația să admită soluții în $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ trebuie ca $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{a-1}{2a+1}\leqslant 1 \Rightarrow a\in\left[-\frac{4+3\sqrt{2}}{2},-2\right]$.

II. a) Ecuația se poate scrie: $\sin^2 x+p\sin x+p-1=0$; $\sin x=-1$; $\sin x=1-p$. În intervalul $[0,2\pi]$ prima ecuație are soluția $x=\frac{3\pi}{2}$. Pentru a doua ecuație avem $-1\leqslant 1-p\leqslant 1 \Rightarrow p\in[0,2]$.

Pentru a avea doar o soluție în $[0, 2\pi]$ trebuie ca $p = 0$ sau $p = 2$. Pentru $p = 2 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$, aceeași ca și în primul caz; pentru $p = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Deci pentru ca ecuația să admită două soluții distincte în intervalul $[0, 2\pi]$ trebuie ca $p = 0$.

b) Pentru $p = \frac{1}{2}$ ecuația devine $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1$ și $\sin x = \frac{1}{2}$ de unde $x = (-1)^k \frac{3\pi}{2} + k\pi$ și $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in Z)$.

c) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ și din ecuația:

$$p = \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x \Rightarrow \sin x = 1 - p; \ \cos x = \pm\sqrt{2p - p^2}; \operatorname{tg} x = \frac{1 - p}{\pm\sqrt{2p - p^2}}$$

deci $\operatorname{tg} 2x = \pm \frac{2p(1 - p)(2 - p)}{(-2p^2 + 4p - 1)\sqrt{p(p - 2)}}$.

III. $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} =$

$= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x} =$

$= \sqrt{1 + 2\cos^2 x + \cos^4 x} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x + \sin^4 x} =$

$= -\sqrt{(1 + \cos^2 x)^2} + \sqrt{(1 + \sin^2 x)^2} = 1 +$

$+ \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 3.$

TESTUL 21

I. a) Pentru $x \in \left[k\pi + \pi,\ k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$,

$|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x \Rightarrow 2 \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi.$

Pentru $x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right] \cup \left(k\pi + \frac{3\pi}{2}, k\pi + 2\pi\right)$,

$|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x \Rightarrow E_1 = 0$ este identitate.

Pentru $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ tangenta nu este definită.

b) $E_2 = 0$ pentru $x \in \left[k\pi,\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[k\pi + \pi, k\pi + \right.$
$\left. + \frac{3\pi}{2}\right]$ $(k \in Z)$.

c) $E_1 E_2$ pe reuniunea mulțimilor date de $E_1 = 0$,
$E_2 = 0$ adică $x \in R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$.

II. Înlocuind pe $x = -1$ în ecuație rezultă:

$$\sin 4a + \sin 3a + \sin 2a + \sin a = 0 \text{ sau}$$

$$2 \sin 3a \cos a + 2\sin 2a \cos a = 0 \Rightarrow \cos a = 0 \text{ cu}$$

soluția $a = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $\sin \frac{5a}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{2k\pi}{5}$;

$\cos \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = (2k + 1)\pi.$

III. a) $y^3 + (a + a^2)y^2 + (a^3 + a^2 - 1)y + a^3 - a = 0.$
Se descompune în factori și rezultă:
$(y + 1)[y^2 + (a^2 + a - 1)y + a^3 - a] = 0;$
$y_1 = -1;\ y_2 = 1 - a^2;\ y_3 = -a;\ |1 - a^2| \leqslant 1,$
$|-a| \leqslant 1.$

Observație: Ecuația se poate rezolva fără a cunoaște rădăcina $y = -1$, dacă se descompune în produs de factori.

b) Pentru $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = -1$; $y_2 = \frac{1}{2}$,

$$y_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi.$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3};$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

c) Deoarece $\cos x_1 = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x_1 = 0$ deci $E =$
$= \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3$.

$$\operatorname{tg}^2 x_2 = \frac{1 - \cos^2 x_2}{\cos^2 x_2} = \frac{2a^2 - a^4}{(1-a^2)^2};$$

$$\operatorname{tg}^2 x_3 = \frac{1 - \cos^2 x_3}{\cos^2 x_3} = \frac{1 - a^2}{a^2} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x_2 \operatorname{tg}^2 x_3 =$$

$$= \frac{a^2(2-a^2)(1-a^2)}{a^2(1-a^2)^2} \Rightarrow E = \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 =$$

$$= \frac{\sqrt{(2-a^2)(1-a^2)}}{|1-a^2|} = \pm \frac{\sqrt{(2-a^2)(1-a^2)}}{1-a^2}$$

(fiindcă pentru existența radicalului trebuie ca $a \in$ $\in (-1, 1)$ iar $|1 - a^2| = 1 - a^2$ pentru $a \in (-1, 1)$.

IV. Determinăm domeniul de existență al soluțiilor: $|x - 1| \leqslant 1$ și $|x| \leqslant 1$ de unde rezultă $x \in [0, 2]$ și $x \in [-1, 1]$ deci $x \in [0, 1]$.

Considerăm cosinusul ambilor membri:

$$\cos[\arccos(x-1)] = \cos[2 \arccos x] \Leftrightarrow x - 1 =$$

$$= 2x^2 - 1 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ și } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Verificați rădăcinile.

V. $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$.

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos x - \cos y}{a - b} = \frac{\sin(x - y)}{a - b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x - \cos y = \sin(x - y); \; -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \Rightarrow 4\sin\frac{x-y}{2}\cos\left(\frac{x}{2} -\right.$$

$$\left.- \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 2k_1\pi + \frac{3\pi}{2};$$

$$y_1 = 2k_2\pi + \frac{3\pi}{2}; \; x_2 = 2(m + m')\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$y_2 = m'\pi + \frac{\pi}{2}; \; x_3 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}; \; y_3 = k'\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$x_4 = n\pi + \frac{\pi}{2}; \; y_4 = 2n'\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Adică, în final: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $y = l\pi + \frac{\pi}{2}$ $l, k \in Z$.

TESTUL 22

I. Funcția f este exponențială și va trebui în primul rînd ca expresia $\frac{2 - \cos^2 a - 2\,|\sin a|}{1 + \sin^2 a}$ să fie strict pozitivă.

Într-adevăr,

$$\frac{2-\cos^2 a-2|\sin a|}{1+\sin^2 a}=\frac{2-(1-\sin^2 a)-2|\sin a|}{1+\sin^2 a}=$$

$$=\frac{1-2|\sin a|+\sin^2 a}{1+\sin^2 a}=\frac{(1-|\sin a|)^2}{1+\sin^2 a}>0.$$

Funcția exponențială este descrescătoare dacă:

$$\frac{2-\cos^2 a-2|\sin a|}{1+\sin^2 a}<1.$$

Deci va trebui să arătăm că pentru orice $a \in R$,

$$a \neq \frac{k\pi}{2};\ \frac{2-\cos^2 a-2|\sin a|}{1+\sin^2 a}<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-(1-\sin^2 a)-2|\sin a|-1-\sin^2 a}{1+\sin^2 a}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2|\sin a|}{1+\sin^2 a}<0,$$

relație evidentă fiindcă $1+\sin^2 a>0$ și $|\sin a|>0$.

II. Cum $x \in (0,\ 1) \Rightarrow \frac{1+x}{1-x}>1$ și astfel

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}<\pi.$$

Analog $0<\frac{1-x^2}{1+x^2}<1 \Leftrightarrow 0<\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ și $\beta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Din relațiile:

$\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $\frac{1-x^2}{1+x^2}=\sin\beta$ eliminăm pe x.

Din prima relație: $x = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1}$ și introducînd în cea

de a doua relație rezultă $\sin \beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin \beta =$

$= \sin \alpha$. Ținînd seama că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ iar $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și avînd același sinus, rezultă că sînt suplementare.

III. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \sin x = m \\ \dfrac{1}{\cos x} - \cos x = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = m \\ \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = m \\ \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = n. \end{cases}$

Înmulțind relațiile membru cu membru rezultă $\sin 2x = 2m\,n$.

Împărțind relațiile rezultă $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}$. Dar:

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow mn\left(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}\right) = \sqrt[3]{mn}.$$

IV. Efectuînd transformări în membrul drept se obține succesiv:

$$\frac{\cos 3x + 55}{2\cos x + 5} = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x + 55}{2\cos x + 5} = 2\cos^2 x - 5\cos x + 11 = (2\cos^2 x - 1) - 5\cos x + 12 = \cos 2x - 5\cos x + 12.$$

V. $\operatorname{tg}(x + |x|) = 1 \Rightarrow x + |x| = \operatorname{arctg} 1 + k\pi$. Pentru $x > 0$, $2x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}$.

TESTUL 23

I. $m \sin^2 x - (2m^2 - m + 1) \sin x + 2m - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sin x = 2m - 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{m} \end{array} \right.$$

$x_1 = (-1)^k \arcsin (2m - 1) + k\pi$ pentru $-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1$ adică $m \in [0, 1]$,

$x_2 = (-1)^k \arcsin \dfrac{1}{m} + k\pi$ pentru $-1 \leqslant \dfrac{1}{m} \leqslant 1$ adică $m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Pentru $m = 1$, $x_1 = x_2$.

II. Notăm $z = 1 - \cos x + i \sin x$;

$$\rho = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \sqrt{2 - 2\cos x} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|;$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \cos x}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \left| \sin \frac{x}{2} \right|;$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin x}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \cos \frac{x}{2}.$$

Pentru $2k\pi < \dfrac{x}{2} < (2k + 1)\pi$, $\sin \dfrac{x}{2} > 0 \Rightarrow \cos \alpha =$

$$= \sin \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \text{ și } \sin \alpha = \cos \frac{x}{2} =$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right), \text{ adică: } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

deci $z = 2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$ de unde

$$(1-\cos x+i\sin x)^n = 2^n\sin^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n(\pi-x)}{2}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{n(\pi-x)}{2}\right].$$

Pentru $(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi \Rightarrow \cos\alpha = -\sin\frac{x}{2} = \sin\left(\pi+\frac{x}{2}\right) = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$;

$\sin\alpha = -\cos\frac{x}{2} = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$ deci $\alpha = \frac{3\pi-x}{2}$.

Rezultă $(1-\cos x+i\sin x)^n =$
$$= (-2)^n\sin^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n(3\pi-x)}{2}+i\sin\frac{n(3\pi-x)}{2}\right].$$

În final se scrie: $(1-\cos x+i\sin x)^n =$

$$=\begin{cases} 2^n\sin^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n(\pi-x)}{2}+i\sin\frac{n(\pi-x)}{2}\right] \text{ dacă } x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)\\ (-2)^n\sin^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n(3\pi-x)}{2}+i\sin\frac{n(3\pi-x)}{2}\right] \text{ dacă } x\in((2k+1)\pi,2(k+1)\pi).\end{cases}$$

III. $\sin A+\sin(C-B) = 2\sin\frac{A+C-B}{2}\cos\frac{A-C+B}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right) = 2\cos B\sin C$. Deci

egalitatea din enunț este: $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos(C-B)}{2\cos B\sin C}$, egalitate ce poate fi scrisă:

$$\frac{\cos A}{2\cos B\sin C} = 0 \Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow A = 90°.$$

IV. Dacă $z = x + iy$ rezultă

$$x + iy = 1 + t + (2t - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t - 1. \end{cases}$$

Eliminînd pe t din aceste două relații se obține ecuația locului geometric: $2x - y - 3 = 0$, care este o dreaptă.

V. Notăm $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ și atunci membrul întîi se scrie succesiv:

$$\frac{1 + i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

Deci $\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha$ și astfel ecuația propusă se scrie: $\cos m\alpha + i \sin m\alpha = a + bi \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos m\alpha = a$ cu $|a| \leqslant 1$ și $\sin m\alpha = b$ cu $|b| \leqslant 1$.

$$\operatorname{tg} m\alpha = \frac{b}{a}; \quad m\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi;$$

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi\right).$$

Deci $x_k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2m}\left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi\right)\right]; \quad k \in \mathbf{Z}.$

TESTUL 24

I. a) $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$

$$\text{şi cum } \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} \neq 0$$

rezultă:

$$\frac{C}{2} = \frac{A-B}{2} \Rightarrow B + C = A.$$

b) $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$; deci relația se mai poate scrie:

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 90°.$$

c) Se observă că relația $\sin A = 2 \sin B \cos C$ se mai poate scrie:

$$\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin B \cos C$$

sau

$$\sin(B - C) = 0 \Rightarrow B = C.$$

II. Ecuația se mai poate scrie:

$$2z^n - (z^n + C_n^1 a\, z^{n-1} + C_n^2 a^2 z^{n-2} + \dots + C_n^n a^n) = 0$$

sau ţinînd seama de formula binomului lui Newton:

$$2z^n - (z+a)^n = 0 \Rightarrow \left(\frac{z+a}{z}\right)^n = 2 \Rightarrow \frac{z+a}{z} =$$

$$= \sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), (k = 0, 1, \ldots, n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}$$

sau în final:

$$z = \frac{a\left[\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right]}{\sqrt[n]{4} + 1 - 2\sqrt[n]{2}\cos\frac{2k\pi}{n}},$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

III. $$E = \frac{2R\sin A}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{2R\sin B}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{2R\sin C}{\sin^2\frac{C}{2}} =$$

$$= 4R\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = 4R\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

IV. 1°. $\frac{b}{c} = k = \operatorname{tg} B \Rightarrow B = \operatorname{arctg} k;$

$\operatorname{ctg} C = k \Rightarrow C = \operatorname{arcctg} k;$

$$b = a\sin B = a\frac{\operatorname{tg} B}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B}} = \frac{ak}{\sqrt{1+k^2}};$$

$$c = a\cos B = a\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B}} = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}.$$

2°. $b = a \sin B$;

$$c = a \cos B \Rightarrow bc = a^2 \sin B \cos B = \frac{1}{2} a^2 \sin 2B =$$

$$= p \Rightarrow \sin 2B = \frac{2p}{a^2} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2p}{a^2},$$

cu condiția $-1 \leqslant \frac{2p}{a^2} \leqslant 1$ etc.

TESTUL 25

I. Se trece de la logaritmul în baza $\frac{1}{2}$ la logaritmul în baza 2 și ținînd seama de faptul că $2^a > 0$, ecuația se mai poate scrie:

$$3 \cdot 2^{-\log_2\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 1\right)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 2^{\log_2\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2\right)^{-1}} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 5 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} x = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arcctg} 5$.

II. Notăm $\sin x = y$. Condițiile de existență ale logaritmului sînt:

$0 < y < 1$, $y \neq \frac{1}{2}$; $\cos 2x = 1 - 2y^2 > 0$ deci

$$0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}; \; y \neq \frac{1}{2}.$$

Inecuația se mai poate scrie:

$$\log_{2\sin x}\sqrt{\cos 2x} - \log_{2\sin x}\sqrt{2\sin x} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2\sin x}\sqrt{\frac{\cos 2x}{2\sin x}} \leqslant 0 \Rightarrow \log_{2y}\sqrt{\frac{1-2y^2}{2y}} \leqslant 0.$$

Cazul I.

$$0 < y < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-2y^2}{2y} \geqslant 1 \Rightarrow 0 < \sin x < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$x \neq \frac{\pi}{6},\ x \neq \frac{5\pi}{6};\ x \in \left[0,\ \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] \cup$$

$$\cup \left[\pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \pi\right).$$

Cazul II.

$$\frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

III. a) Pentru ca să existe un $x \in R$ astfel încît $\sin x +$ $+ m\cos x = n$ trebuie ca:

$$\frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}} \leqslant 1 \Rightarrow n \in [-\sqrt{1+m^2},\ \sqrt{1+m^2}].$$

Deci vom calcula E în această ipoteză.

Pentru orice $a, b, c, d \in R$ are loc identitatea

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2.$$

În această identitate se înlocuiesc

$a = 1,\ b = m,\ c = \sin x,\ d = \cos x$, și se obține:

$(1+m^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin x + m\cos x)^2 +$ $+ (m\sin x - \cos x)^2$ sau ținînd seama de ipoteza problemei

$$E^2 = 1 + m^2 - n^2 \text{ adică } E = \pm\sqrt{1+m^2-n^2}.$$

b) Din relația de condiție deducem: $m \cos x = n - \sin x$ sau ridicînd la pătrat: $m^2\cos^2 x = n^2 - 2n \sin x + \sin^2 x$.

Dacă $\sin x = t$ obținem: $m^2(1 - t^2) = n^2 - 2nt + t^2$.

IV. a) Ridicînd la pătrat prima ecuație și ținînd seama de cea de a doua rezultă: $a^2 - 2 = b$ deci: $f(a, b) = a^2 - b - 2 = 0$.

b) Relația se scrie $m^2 - \sin y - 2 = 0$. Punînd condiția $\sin y \in [-1, 1] \Rightarrow m \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

V. a) Fie SI perpendiculară pe planul ABC și fie $SD \perp AB$. Notăm unghiul diedru $\widehat{SDI} = \alpha$, $\cos \alpha =$

$$= \frac{DI}{DS} = \frac{\frac{1}{3} DC}{DS} = \frac{\frac{1}{3} a \cos 30^\circ}{a \cos 30^\circ} = \frac{1}{3}; \quad \sin \alpha = \frac{IS}{DS} =$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{IS}{ID} = \frac{\frac{a}{3}\sqrt{6}}{\frac{a}{6}\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$$

b) $\widehat{SCI} = x; \ \sin x = \frac{SI}{SC} = \frac{\sqrt{a^2 - IC^2}}{a} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{2CD}{3}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}}{a} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ Deci } \sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

TESTUL 26

I. a) Necunoscutele fiind x și y se rezolvă prin metoda reducerii (sau substituției). Rezultă $x = \sin\alpha$; $y = \cos\alpha$.

b) $$E = \frac{xy^2 + x^2y + xy^3 + x^3y - (x^2 + y^2) + x^2y^2 + 1}{xy(1+x)(1+y)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha +}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$$

$$\frac{+\cos^2\alpha) - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)} = \mathbf{1}.$$

c) $$S = z_1 + z_2 = \frac{x+y}{xy} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}; P = z_1 \cdot z_2 =$$

$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$ deci ecuația în z va fi

$$z^2\sin\alpha\cos\alpha - (\sin\alpha + \cos\alpha)z + 1 = 0.$$

d) $\Delta = 0$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

e) Trebuie deci ca $\sin\alpha\cos\alpha > 0$. Alcătuim următorul tabel

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin\alpha$		+		+	0	−		−	0
$\cos\alpha$		+	0	−		−	0	+	
$\sin\alpha\cos\alpha$	0	+	0	−	0	+	0	−	0

Pentru $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ambele rădăcini sînt pozitive; pentru $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ambele rădăcini sînt negative.

II. a) Fie S vîrful piramidei, $ABCDEF$ hexagonul de la bază, SO înălțimea piramidei, SI apotema piramidei ($I \in AB$). Prin AC construim un plan perpendicular pe SB. Unghiul căutat $x = \widehat{AMC}$ (unde $M \in SB$ este punctul în care SB intersectează planul perpendicular construit).

Există relațiile: $SB \cdot AM = AB \cdot SI$ dar $SB = a\sqrt{2}$ și $SI = \sqrt{SO^2 + BS^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7}$.

$AM = MC = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. În triunghiul AMC: $AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cos x = 2AM^2(1 - \cos x)$, iar $AC = a\sqrt{3}$. Rezultă $3 = \frac{7}{4} - \frac{7}{4}\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{5}{7}$.

b) În triunghiul AMC: $AC^2 = 2AM^2 - 2AM^2 \cos x$;

$$AM^2 = \frac{AB^2 \cdot SI^2}{BS^2} = \frac{a^2(4h^2 + 3a^2)}{4(h^2 + a^2)}.$$

$$\cos x = \frac{2AM^2 - AC^2}{2AM^2} = \frac{\frac{2a^2(4h^2 + 3a^2)}{4(h^2 + a^2)} - 3a^2}{\frac{2a^2(4h^2 + 3a^2)}{4(h^2 + a^2)}} =$$

$$= -\frac{3a^2 + 2h^2}{3a^2 + 4h^2}.$$

III. Numerele complexe sînt de forma:

$$z = x + \mathrm{i}\, y; \quad |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Înlocuind în ecuație obținem:

$x^2 + y^2 - 2\,\mathrm{i}(x + \mathrm{i}\, y) + 2a + 2a\,\mathrm{i} = 0$, de unde:

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a + 2y = 0 \\ -2x + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow x = a$ iar $y = -1 \pm$ $\pm\sqrt{1 - 2a - a^2}$. Deci numerele complexe care satisfac ecuația sînt

$$z = a + \mathrm{i}\left(-1 - \sqrt{1 - 2a - a^2}\right)$$

$$z = a + \mathrm{i}\left(-1 + \sqrt{1 - 2a - a^2}\right).$$

TESTUL 27

I. 1) $a^2 - b > 0, \quad 1 + 2a + b > 0, \quad 1 - 2a + b > 0$ fiindcă $|\cos x| \leqslant 1$ și $\Delta > 0$ cu $|a| < 1$ (vezi I. 4.13).

2) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Deci $\cos 2x_1 + \cos 2x_2 = 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2) - 2 = 2(\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 4\cos x_1 \cdot \cos x_2 - 2 = 2 \cdot 4a^2 - 4b - 2$ etc. Rezultă:

$$\cos^2 2x - 2(4a^2 - 2b - 1) \cdot \cos 2x + (2b + 1)^2 - 8a^2 = 0.$$

II. a) $T_{k+1} = C_{72}^{k}\, x^{72-k} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}; \quad x^{72 - k - \frac{k}{3}} = x^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 54;\ T_{55} = C_{72}^{18}$ și $x^{72 - k - \frac{k}{3}} = x^{28} \Rightarrow k = 33$, $T_{34} = C_{72}^{33}\, x^{28}$.

b) $x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^4 - 2(\sqrt[3]{x})^2 + 1 = 0;$

$\sqrt[3]{x} = y \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1.$

III. Se ordonează mai întîi ecuația și se obține

$$f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+1)x - 4 = 0$$

apoi se pun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-3) \cdot f(-1) < 0 \\ f(3) \cdot f(4) < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}\right).$$

IV. $(2n+1)! = (2n-1)!\,2n(2n+1)$ și $(2n+2)! = (2n)! \cdot (2n+1)(2n+2).$

Deci ecuația se scrie

$$2n(2n+1) + (2n+1)(2n+2) = 242.$$

Convine $n = 5$.

V. $\widehat{HAC}$, $\widehat{HAB}$ fiind complementarele lui C și B au valorile $\frac{\pi}{6}$, respectiv $\frac{\pi}{3}$.

În triunghiul AHP conform teoremei sinusurilor

$$\frac{\sin \widehat{HAP}}{HP} = \frac{\sin \widehat{APH}}{h} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{HP} = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{HP} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin \frac{\pi}{3}}.$$

Din triunghiul AHQ,

$$\frac{1}{HQ}=\frac{1}{h}\cdot\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}$$ şi din condiţia $\frac{1}{HP}+\frac{1}{HQ}=\frac{2m}{h}$

rezultă:

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2m\sin\frac{\pi}{3}\cdot$$

$\cdot\sin\frac{\pi}{6}$ sau încă: $\cos x+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x=m$. Înlocuind

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$ se obţine:

$$(m+1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+m-1=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii trebuie să fie reale iar $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ deci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\in(0,1)$. Pentru ca o rădăcină să convină trebuie ca $f(0)\cdot f(1)<0\Rightarrow m\in\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Pentru ca două rădăcini să existe trebuie ca:

$$\begin{cases}\Delta\geq 0\\(m+1)\cdot f(0)>0\\(m+1)\cdot f(1)>0\\0<\frac{S}{2}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\\m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\m\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)\\m\in\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1,+\infty\right)\end{cases}$$

Deci $m \in \left(1, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

Cazuri particulare: dacă $m = \sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ rădăcină dublă egală cu $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}+3}$; dacă $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $f(1) = 0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; dacă $m = 1$, $f(0) = 0$ deci $x = 0$.

TESTUL 28

I. Sînt cunoscute identitățile:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x$$
$$2 \operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{ctg} 2x - 4 \operatorname{ctg} 4x$$
$$4 \operatorname{tg} 4x = 4 \operatorname{ctg} 4x - 8 \operatorname{ctg} 8x$$

....

....

$$2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^n \operatorname{ctg} 2^n x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$$

Însumînd membru cu membru se obține:
$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + \ldots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \operatorname{ctg} x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$.
Deci ecuația dată se mai poate scrie: $\operatorname{ctg} x = 1$ cu soluția $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

II. Se consideră identitățile cunoscute:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = \frac{1}{\sin 2^2 x}$$

. . . .

$$\operatorname{ctg} 2^{n-1} x - \operatorname{ctg} 2^n x = \frac{1}{\sin 2^n x}.$$

Însumînd membru cu membru aceste identități rezultă:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \frac{1}{\sin 2^3 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x},$$

adică s-a obținut identitatea propusă.

Desigur, trebuie pusă condiția ca:

$$\sin 2^n x \neq 0,\ 2^n x \neq k\pi,\ x \neq \frac{k\pi}{2^n}.$$

III. Înlocuind în ecuație $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ se constată că este verificată. Trebuie arătat că nici un alt număr în afara lui $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ nu verifică ecuația. Observăm că pentru $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\sin x$ și $\cos x$ au același semn. Într-adevăr: $\frac{1}{\cos^m x} - \cos^n x = \frac{1}{\sin^m x} - \sin^n x$. Pentru $\cos x < 0$ și $\sin x > 0$ membrul stîng este pozitiv iar cel drept negativ și prin urmare $\sin x \cos x > 0$. Dacă $\sin x < \cos x < 0$ sau $0 < \sin x < \cos x$ atunci $\sin^n x > \cos^n x$ și $\frac{1}{\cos^m x} > \frac{1}{\sin^m x}$ cu m, n impare.

Dacă $\sin x > \cos x > 0$ sau $0 > \sin x > \cos x$ atunci $\sin^n x > \cos^n x$ și $\frac{1}{\cos^m x} > \frac{1}{\sin^m x}$. Însumînd termenii ultimelor două inegalități: $\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} >$ $> \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}$. Deci ecuația este verificată doar pentru $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

IV. a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ Considerăm o secțiune plană dusă prin axa de rotație a conului înscris în sferă. Secțiunea ABC (vezi fig. 97) este un triunghi echilateral.
Din triunghiul dreptunghic $ACA'' \Rightarrow A''C = r$, $A'C =$ $= \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $A'A'' = \frac{r}{2}$. $\triangle AIN \sim \triangle AA'C \Rightarrow IN =$ $= \frac{\sqrt{3}(3r - 2x)}{6}$.

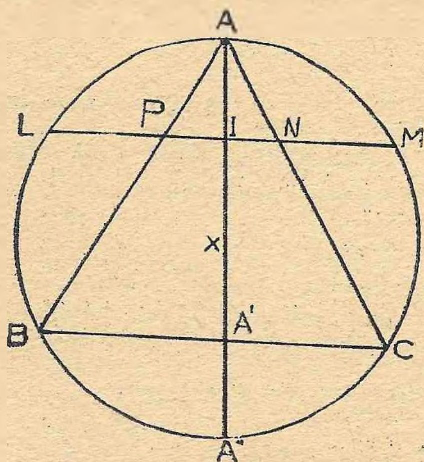


Fig. 97.

Notînd cu O centrul sferei din triunghiul $OIM_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow IM^2 = \dfrac{3r^2 - 4x^2 + 4rx}{4}$.

Conform enunţului trebuie ca: $\dfrac{3r^2 - 4x^2 + 4rx}{4} -$
$- \dfrac{(3r - 2x)^2}{12} = \dfrac{3r^2}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3r}{4}$.

b) Centrul sferei coincide cu centrul de greutate al tetraedrului. Deci înălţimea tetraedrului este $4r$, lungimea muchiei este $2r\sqrt{6}$ iar volumul $V = 8r^3\sqrt{3}$.

TESTUL 29

I. Notînd cu H proiecţia vîrfului A pe ipotenuza BC şi cu S şi V aria şi volumul corpului rezultă: $S =$
$= \pi AH (AB + AC) = \pi \cdot l \cdot AH$, $V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot AH^2 \cdot$
$\cdot BC = \dfrac{\pi a}{3} AH^2$. Dar $AB = a \cos B$, $AC = a \sin B$
deci $AH = a \sin B \cos B$.
Însumînd catetele obţinem: $a (\sin B + \cos B) =$
$= l \Rightarrow \sin B + \cos B = \dfrac{l}{a}$. Ridicăm la pătrat această relaţie şi obţinem: $\sin^2 B + \cos^2 B + 2 \sin B \cos B =$
$= \dfrac{l^2}{a^2}$ adică $\sin B \cos B = \dfrac{l^2 - a^2}{2a^2} \Rightarrow AH =$
$= \dfrac{l^2 - a^2}{2a} \Rightarrow S = \dfrac{\pi l(l^2 - a^2)}{2a}$, $V = \pi \dfrac{(l^2 - a^2)}{12a}$.

II. Se observă că: $P(i) = 0$ şi $P(-i) = 0$. Se poate rezolva şi prin identificare.

III. Notînd cu θ argumentul numărului complex de modul egal cu 1, rezultă că ecuația se poate scrie:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \frac{1+iz}{1-iz} =$$

$$= \cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}, \quad (k = 0, 1, \ldots$$

$$\ldots, n-1); \quad iz = \frac{\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n} - 1}{\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{tg}\frac{k\pi+\frac{\theta}{2}}{n},$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

IV. $a = 2R$, $b + c = 2p - 2R$. În ultima relație înlocuim $b = a\sin B$, $c = a\sin C$ și obținem: $a(\sin B +$ $+ \sin C) = 2(p - R) \Rightarrow 2R\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} =$

$$= 2(p-R) \Leftrightarrow 2R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = p - R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} = \frac{p-R}{R\sqrt{2}}; \text{ adică } p < R(1+\sqrt{2}).$$

Calculînd unghiurile B și C este ușor să se calculeze laturile.

V. a) $$E(x) = \frac{(\cos 2x + 1)[2(1-\lambda)\cos 2x + 2\lambda - 1]}{\lambda\sin^2 x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 60°)} =$$

$$= \frac{4(\cos 2x + 1)[4(\lambda-1)\sin^2 x + 1]}{4(\lambda-1)\sin^2 x + 1} = 4(\cos 2x + 1).$$

b) $\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

TESTUL 30

I. Notăm $\log_{\sec x}(13,25) = t \Rightarrow (\sec x)^t = 13,25 = 1 + 12,25$.
$\log_{\operatorname{tg} x}(12,25) = t \Rightarrow (\operatorname{tg} x)^t = 12,25$. Deci $(\sec x)^t = 1 + (\operatorname{tg} x)^t \Rightarrow (\sin x)^t + (\cos x)^t = 1$ și cum $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rezultă $t = 2$ căci, în caz contrar, deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vom avea $(\sin x)^t + (\cos x)^t \neq 1$ deci: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{12,25} = \operatorname{arctg} 3,5$.

II. $\sin x + \sin 2x = \frac{5}{a} \sin 3x \Rightarrow \sin x = 0$ și $4 \cos^2 x - 2a \cos x - a - 1 = 0 \Rightarrow x = k\pi$; $2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; $\cos x = \frac{a+1}{2}$ cu condiția $a \in [-3, 1]$.

III. Ținînd seama de formulele $\sin \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ și $\sin \beta = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$ relațiile dintre rădăcini sînt: $x_1' = \frac{2x_1}{1 + x_1^2}$ și $x_2' = \frac{2x_2}{1 + x_2^2}$. În final găsim condiția: $pq_1(1 + q) = 2p_1 q$.

IV. $$\frac{x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{x}{1 + x^2} \cdot \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Notăm $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ și rezultă

$$\left| \frac{1}{2} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \sin \alpha \cos \alpha \right| =$$

$= \frac{1}{4} \left| 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right| = \frac{1}{4} \left| \sin 2\alpha \right| \leqslant \frac{1}{4}$, deoarece $\left| \sin 2\alpha \right| \leqslant 1$.

Sau: $x = \operatorname{tg} y \Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} \sin 4y \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow -1 \leqslant$ $\leqslant \sin 4y \leqslant 1$, inegalitate evidentă.

V. a) Triunghiurile MBQ și PMC sînt echilaterale $\Rightarrow$ $\Rightarrow AP + AQ = MQ + PM = MB + MC = BC = a$.
b) Notăm $AP = x$, $AQ = y$ și deci $x + y = a$; $x^2 + y^2 - 2xy \cos A = l^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - xy = l^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + y)^2 - 3xy = l^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2 - l^2}{3}$. Deci x, y sînt rădăcinile ecuației $t^2 - at + \frac{a^2 - l^2}{3} = 0$; $x, y =$ $= \frac{3a \pm \sqrt{3(4l^2 - a^2)}}{6}$ cu $4l^2 - a^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{a}{2} < l \leqslant a$.

c) În triunghiul APQ: $x^2 = y^2 + l^2 - 2ly \cos Q \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos Q = \frac{l^2 + y^2 - x^2}{2ly}$; $y^2 - x^2 = (y + x)(y -$

$$- x) = a \frac{\sqrt{3(4l^2 - a^2)}}{3} \Rightarrow \cos Q =$$

$$= \frac{3l^2 + a\sqrt{3(4l^2 - a^2)}}{l(3a + \sqrt{3(4l^2 - a^2)})}.$$

Analog se calculează $\cos P = \dfrac{3l^2 - a\sqrt{3(4l^2 - a^2)}}{l(3a + \sqrt{3(4l^2 - a^2)})}$.

d) $l = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos Q = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Q = 30°$;

$l = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos P = 0 \Rightarrow P = 90°$. Deci triunghiul APQ, în acest caz, este dreptunghic în P.

TESTUL 31

I. Condițiile de existență ale logaritmului sînt: $\cos x > 0$,

$$\cos x \neq 1,\ \frac{1}{2} - \cos x > 0,\ \frac{1}{2} - \cos x \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Notăm $\log_{\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = t$ și ecuația se scrie $t^2 - 3t + 2 = 0$, cu rădăcinile $t = 1$ și $t = 2$. Pentru $t = 1$ avem: $\log_{\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{4}$. Pentru $t = 2$ avem $\log_{\cos x}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 2$ cu soluția convenabilă $\cos x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, $(k \in Z)$.

II. Baza este $ABCD$ iar vîrful S. I este intersecția diagonalelor AB și CD. $IM \perp SC$. Unghiul căutat este $\widehat{AMB} = x$. In triunghiul AIM avem: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{AI}{IM}$, dar $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și din expresia ariei triunghiului SIC rezultă $IM \cdot CS = SI \cdot IC \Rightarrow IM = \frac{SI \cdot IC}{SC} =$

$$= \frac{h \frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{ah\sqrt{2}}{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}.$$

Deci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4h^2}}{2h} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} =$

$= -\frac{2h\sqrt{2a^2 + 4h^2}}{a^2}$.

Dar $\operatorname{tg} x$ mai poate fi pusă sub forma: $\operatorname{tg} x = -\frac{4h^2}{a^2}\sqrt{1 + \frac{2a^2}{4h^2}}$ și notînd $\frac{a^2}{2h^2} = \operatorname{tg}^2\alpha$ rezultă $\operatorname{tg} x = -\frac{4h^2}{a^2 \cos\alpha}$.

III. Ecuația se mai poate scrie:

$2^3 \cdot 2^{2(2\cos 2x - 1) - 2} + 5 \cdot 2^{2\sin 2x} - 5 \cdot 2^{\cos 2x} - 2^{4\sin 2x} = 2$

sau: $2 \cdot 2^{2\cos 2x} + 10 \cdot 2^{-\cos 2x} - 4 \cdot 2^{-\cos 2x} = 2$.

Notăm: $2^{\cos 2x} = y$ și se obține ecuația:

$2y^4 - 5y^3 - 2y^2 + 10y - 4 = 0$; $(y^2 - 2)(y - 2)(2y - 1) = 0$; $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{2}$; $y_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Dar $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 2$ și avem: pentru $y = 2$; $x = k\pi$;

pentru $y = \frac{1}{2}$; $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; pentru $y = \sqrt{2}$;

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$; Valoarea $y = -\sqrt{2}$ nu este acceptabilă.

IV. a) $x_1^2 + x_2^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. Deci condiţia este $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$. De unde $4p^2 - 2q = 1$.

b) Pentru $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x_1, x_2 \in (0, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Pentru $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ sau $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ trebuie ca: o rădăcină să fie în intervalul $(-1, 0)$ iar cealaltă în $(0, 1) \Rightarrow p \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pentru $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ trebuie ca $x_1, x_2 \in (-1, 1) \Rightarrow p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Coşniţă, F. Turtoiu, *Culegere de probleme de matematică pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţămîntul superior*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.
2. I. Desbats, *Initiation à l'épreuve de mathématiques à l'examen probatoire*, Paris, 1969.
3. F.G.M., *Exercices de trigonométrie*, Paris.
4. F.G.M., *Exercices d'algebre*, Paris.
5. C. Ionescu Ţiu, L. Pîrşan, *Algebră şi analiză matematică pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti 1974.
6. Eremia Georgescu-Buzău şi Nazarie Matei, *Relaţii, funcţii şi structuri algebrice*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.
7. N. Leonăchescu, *Termotehnica*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.
8. C. Ionescu Ţiu, N. Mihăileanu, L. Pîrşan, E. Rogai, *Probleme de matematică pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţămîntul superior*, Editura tehnică, Bucureşti, 1972.
9. N. Mihăileanu şi colaboratori, *Culegere de probleme de geometrie sintetică şi proiectivă*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
10. C. Perju, R. Perju, *Probleme de matematică pentru admitere în învăţămîntul superior*, Editura militară, Bucureşti, 1974.
11. I. Stamate, I. Stoian, *Culegere de probleme de algebră pentru licee*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
12. M. Stoka, M. Raianu, E. Mărgăritescu, *Culegere de probleme de trigonometrie pentru licee*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.

Periodice: Gazeta matematică, seria B, 1960-1975.

Lector: GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor: CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 23.IV 1976. Apărut 1976. Comanda nr. 1 191. Tiraj: 137 000 broşate. Coli de tipar: 29.



Comanda nr. 60 064
Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii"
Bucureşti — Piaţa Scînteii nr. 1,
Republica Socialistă România

COLECȚIA LYCEUM



«Un merit deosebit al cărții de față îl constituie exercițiile de învățămînt programat și testele de control, care reprezintă un instrument util pentru munca independentă a elevilor, cărora li se dă posibilitatea de a-și aprecia singuri rezultatele muncii lor.»

Acad. GH. MIHOC

Lei 6